AVALIAÇÃO DO RISCO DE FALHA

BASEADA NA MECÂNICA DA FRATURA E EFEITO DE ESCALA CONSIDERANDO A INCERTEZA DA CARACTERIZAÇÃO DE

MATERIAIS CIMENTÍCIOS



Inés Damaris Muñoz Peña

ORIENTADOR
Francisco Evangelista Júnior

APOIO

UnB CAPES

Atena Editora
Ano 2024

AVALIAÇÃO DO RISCO DE FALHA

BASEADA NA MECÂNICA DA FRATURA E EFEITO DE ESCALA CONSIDERANDO A INCERTEZA DA CARACTERIZAÇÃO DE

MATERIAIS CIMENTÍCIOS



Inés Damaris Muñoz Peña

ORIENTADOR
Francisco Evangelista Júnior

APOIO

UnB

CAPES

Atena Editora
Ano 2024

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Ellen Andressa Kubisty
Luiza Alves Batista
Nataly Evilin Gayde
Thamires Camili Gayde
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Avaliação do risco de falha baseada na mecânica da fratura e efeito de escala considerando a incerteza da caracterização de materiais cimentícios

Diagramação: Ellen Andressa Kubisty
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Autores: Inés Damaris Muñoz Peña
Francisco Evangelista Júnior (Orientador)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S598 Simonetti, Marcelo José
Avaliação do risco de falha baseada na mecânica da fratura e efeito de escala considerando a incerteza da caracterização de materiais cimentícios / Inés Damaris Muñoz Peña, Francisco Evangelista Júnior (Orientador). – Ponta Grossa - PR: Atena, 2024.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-2649-3
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.493242006

1. Mecânica da fratura. I. Peña, Inés Damaris Muñoz. II. Evangelista Júnior, Francisco (Orientador). III. Título.
CDD 620.1362

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

DEDICATÓRIA

Salmo 135: 1 e 138:3

“Agradeço a Deus, porque é infinitamente bom, porque a sua misericórdia dura para sempre, quando eu procurei a ele, ele respondeu e renovo minha força”

Dedico este trabalho a minha Família que são fonte de amor e fortaleza e aos meus amigos.

RESUMO

Comumente, os sistemas estruturais são projetados com modelos determinísticos, desprezando a natureza incerta dos diversos parâmetros determinantes do comportamento estrutural. Além disso, boa parte dos modelos de falha estrutural utilizados nos projetos de dimensionamento não considera o racional mecânico, oriundo da mecânica da fratura na predição do colapso estrutural de sistemas e membros estruturais. Este trabalho estuda o risco estrutural das predições com modelos da Mecânica da Fratura Não-Linear Elástica para materiais e estruturas quasi-frágeis, especialmente para os materiais cimentícios com e sem adição de reciclados. Esta pesquisa implementa um algoritmo para realizar a análise de funções de estado limite não lineares que descrevem o estado limite de ruptura de vigas por propagação instável de trincas. Parâmetros de fratura de materiais cimentícios são extraídos de ensaios de laboratório como especificados nos métodos clássicos: efeito de escala de Bazant (EEB) e modelo de dois parâmetros (MDP). Os resultados quantificam a predição da falha estrutural e probabilidade de fraturamento instável incorporando a influência da variabilidade estatística dos parâmetros dos materiais obtidos em ensaios de laboratório. Os principais parâmetros de fratura investigados são a energia de fratura crítica (G_f) e o tamanho equivalente da zona de processo (C). O trabalho faze comparações para medir a confiabilidade entre matérias tais concreto convencional (CONC) e concreto reciclado (FRAP).

PALAVRAS-CHAVE: mecânica da fratura, análise de confiabilidade, efeito de escala.

ABSTRACT

Commonly, structural systems are designed with deterministic models, disregarding the uncertain nature of the various relevant parameters of structural behavior. In addition, many of the structural failure models used in design do not consider the fracture mechanics to predict the structural failure or collapse of systems and structural members. This dissertation studies the structural risk predictions considering models of Non-Linear Elastic Fracture for quasi-brittle materials and structures, especially for cement and recycled materials. A algorithm is proposed and implemented to perform the analysis of nonlinear limit state functions that describe the failure state for three-point bending beams for unstable crack propagation. Cementitious materials fracture parameters are extracted from laboratory tests as specified in the classical methods Bazant's size effect model (EEB) and two-parameter fracture model (MDP). The results quantify the prediction of structural failure and unstable fracture probability incorporating the influence of statistical variability of the parameters of the materials obtained in laboratory tests. The main investigated fracture parameters are the critical fracture energy (G_f) and the equivalent size of the process zone (C). This work also compares the reliability index for beams of conventional concrete (CONC) and recycled concrete (FRAP).

KEYWORDS: fracture mechanics, reliability analysis, size effect.

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIAÇÕES

CONC	Concreto Convencional
CTOD	Abertura da ponta da fissura
$CTOD_C$	Abertura da ponta da fissura critica
$CMOD_c^e$	Abertura da ponta da fissura elástica
$CMOD_c^p$	Abertura da ponta da fissura plástica
EEB	Efeito de Escala de Bazant
FDC	Função de Distribuição Acumulada
FDP	Função de densidade de Probabilidade
FOSM	Primeira Ordem Segundo Momento
FORM	Método de confiabilidade de Primeira Ordem
FRAP	Concreto Reciclado
FTP	Flexão em três pontos
MDP	Modelo de Dois Parâmetros
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MFNLE	Mecânica da fratura não linear Elástica
MMC	Método Monte Carlo
A	Inclinação
A^*	Parâmetro da distribuição uniforme
B	Constante adimensional
B^*	Parâmetro da distribuição uniforme
B_o	Ponto de intercepção
C	Comprimento crítica da região de fratura
C_i	Inclinações das Curvas iniciais de carregamento
C_n	Constante que relaciona S e D
C_u	Inclinações das Curvas iniciais de descarregamento
CV	Coeficiente de variação
D	Altura da viga
D_0	Constante com a dimensão de comprimento
E	Módulo de Elasticidade
E_i	Módulos de elasticidade do material no processo de carregamento
$E(X)$	Média aritmética
E_u	Módulos de elasticidade do material no processo de descarregamento
F_S	Fator de segurança
$F_X(x)$	Função de Distribuição Acumulada
G_f	Taxa de Liberação de energia
H_0	Altura da haste de suporte
K	Fator de Intensidade de Tensões
K_{Ic}	Fator de Intensidade de Tensões critico
L	Comprimento da viga

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIAÇÕES

N	Número de simulações MMC
P_f	Probabilidade de falha
P_j	Carregamento Máximo
P_r	Carregamento resistente
P_r^{EEB}	Termo da predição de resistência do modelo de EEB
P_r^{MFLE}	Este termo proveniente da predição de resistência do ensaio de MFLE
Ps	Carregamento de solicitação
Pu	Carregamento ultimo
Q	Solicitação
R	*R*esistência
S	Vão
S_x	Análogo ao desvio padrão na distribuição T
T	Distribuição T.
V	Variável aleatória chi quadrada da distribuição T
W_j	Peso da Viga *j*
W_h	Peso da Viga em relação com o vão e comprimento da viga
$\bar{X}$	Centroide o média aritmética dos dados.
$\bar{Y}$	Centroide o média aritmética dos dados.
Z	Variável aleatória normal padrão da distribuição T
a_0	Comprimento inicial da fissura
a_c	comprimento de trinca efetiva
t	Espessura da viga
$f\left(\frac{a_0}{D}\right)$	Fator Geométrico
f_t'	Esforço de tensão do material
$f_X(x)$.	Função de densidade de Probabilidade
$g\,(\mu_x)$	Estado limite da função padrao
$g(\alpha)$	Fator Geométrico em função de *S/D*
$g'(\alpha)$	Derivada de Fator Geométrico $g(\alpha)$
$h(t)$	Função de Densidade de Probabilidade da distribuição T
k	Número de iterações
k_x	Parâmetro de forma que mede a dispersão distribuição V.E.
u_i^*	As coordenadas para o ponto de projeto
u_{xi},	Números aleatórios uniformes
x_i	Coordenadas do ponto de projeto em seu espaço original.
x'_i	Variável aleatória com distribuição equivalente
α	Constante que relaciona a_0 com *D*.

$\hat{\alpha}_\iota$	Fator de sensibilidade
β	Índice de confiabilidade
$\Gamma(p_1)$	Função da distribuição gamma
ε	Parâmetro de convergência.
$\phi(s)$	Função de Distribuição Acumulada padrão
ϕ -1	Inversa da função de distribuição acumulada
γ	Parâmetro da distribuição gamma e weibull
$\nabla g(\mu_X)$	Gradiente de g avaliado
λ	Parâmetro da distribuição gamma e weibull
μ	Media
μ_Y	Media Lognormal
$\mu_{\hat{g}}$	A média avaliado no estado limite da função.
$\mu_{x'i}$	Média equivalente
σ	Desvio padrão
σ^2	Variância
σ_g	Desvio padrão da função da aproximação do estado limite
σ_r	Tensão Máxima que Resiste o Corpo
$\sigma_{x'i}$	Desvio equivalente
σ_Y	Desvio Lognormal
υ	Coeficiente de Poisson
v_x	Graus de liberdade da distribuição T
v_n	Maior valor característico da variável *x*

SUMÁRIO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Materiais cimentícios são usados com muita frequência para a construção de membros e sistemas estruturais de pequeno e grande porte em todas as áreas da engenharia. O concreto, por exemplo, é o material de engenharia mais utilizado no mundo. Dessa forma, é importante conhecer as vantagens e desvantagens de suas principais propriedades e características, tais como resistência, durabilidade e custo. Ainda hoje, boa parte dos modelos de falha estrutural utilizados nos projetos de dimensionamento não considera a mecânica da fratura na predição do colapso estrutural de sistemas e membros estruturais compostos por materiais cimentícios. Apesar de relativamente bem documentado na literatura (Bazant e Planas, 1997; Shah *et al.*, 1994; Li, 2011), o fraturamento do concreto é ainda um tópico desafiador devido a suas características especiais, tais como comportamento quasi-frágil, não aplicabilidade da mecânica da fratura linear elástica (MFLE), dependência do tamanho da estrutura e grande variabilidade estatística nas propriedades (Evangelista Jr *et al.*, 2013; Evangelista Jr e Peña, 2014).

O problema de falha por fraturamento está intimamente relacionado com análises estatísticas, através da teoria do "*elo mais fraco*" onde os estudos probabilísticos de Weibull criaram o modelo de mesmo nome, que explica a diminuição da resistência com o aumento do volume da estrutura. Os trabalhos clássicos de Bazant (1984) e Bazant e Kazemi (1990) formalizaram a lei do efeito de escala, ou efeito de tamanho, para estruturas de concreto, aqui chamada de Efeito de Escala de Bazant (EEB). O modelo é baseado em conceitos da mecânica da fratura não linear elástica (MFNLE), em modo I de fratura, levando em conta duas propriedades de fratura: energia inicial crítica de fratura (G_f) e tamanho equivalente da zona de processo (C). Aqui o efeito de escala na falha das estruturas prevê uma diminuição da resistência nominal, a medida que o tamanho da estrutura aumenta. Paralelamente, Jenq e Shah (1985) utilizaram os mesmos conceitos da MFNLE para propor o Modelo de Dois Parâmetros (MDP), que também é capaz de prever o efeito de escala em estruturas de concreto por meio do G_f e do deslocamento crítico da ponta da trinca ($CTOD_C$).

Os dois modelos EEB e MDP vêm sendo os principais modelos de previsão de crescimento de trincas em estruturas de concreto, inclusive com métodos RILEM diferenciados para o cálculo de seus parâmetros (RILEM 1990a; RILEM 1990b). Desde então, estes modelos e seus respectivos procedimentos de ensaio tem criado muita controvérsia, em termos de eficiência e facilidade da extração dos parâmetros de fratura em laboratório e acurácia de suas previsões (Mehta e Monteiro, 2012; Mindess *et al.*, 2003; Bazant; Planas, 1997; Shah *et al.*, 1994; Li, 2011).

O estudo ou avaliação do risco de falha baseia-se de forma geral em análises de confiabilidade, para medir a probabilidade de ocorrência em que um sistema ou membro estrutural irá desempenhar sua função no limite da falha estrutural. A confiabilidade é expressa quantitativamente por um índice de confiabilidade β, que se relaciona

inversamente com a probabilidade de falha (P_f) da estrutura. A análise de confiabilidade considera as possíveis incertezas apresentadas nas variáveis do problema, para predizer a probabilidade da falha do sistema. Por meio da teoria de probabilidade e de uma função que relaciona estas variáveis (função de estado limite) têm-se as bases para estimar a confiabilidade através de algoritmos mais simples, tais como o primeira ordem segundo momento (*First-Order Second Moment,* FOSM), até métodos mais elaborados como o método de confiabilidade de primeira ordem (*First-Order Reliability Method*, FORM) (Nowak e Collins, 2013; Melchers (1999). Dependendo da forma da função do estado limite e do tipo de distribuição de probabilidade das variáveis envolvidas, soluções analíticas podem ser encontradas. Para casos mais complexos, principalmente envolvendo não linearidade da função no limite de falha, métodos numéricos mais sofisticados devem ser empregados para o cálculo do índice β. Também poderão ser analisados os parâmetros C e $G_{f,}$ e estabelecer uma comparação por meio do Método de Monte Carlo (MMC).

1.1 JUSTIFICATIVA

Comumente, os sistemas estruturais são projetados considerando modelos determinísticos, que negligenciam a natureza incerta dos diversos parâmetros determinantes do comportamento estrutural. No caso da predição probabilística da falha da estrutura por propagação instável de trincas, é de vital importância as variáveis de carregamento, de geometria e propriedades dos matérias. Além disso, a escolha do modelo a ser utilizado bem como as propriedades de fratura associados a ele assumem fundamental importância na predição probabilística da falha. Entretanto, nenhum trabalho da literatura investiga os efeitos dos dois principais modelos para materiais quasi-frágeis (EEB e MDP), considerando métodos probabilísticos para avaliar as incertezas na determinação dos parâmetros de fratura e como elas impactam a predição dos índices de segurança (e análise de risco) de membros estruturais. Também é de fundamental importância o estudo de como o efeito de escala influencia na confiabilidade estrutural considerando a falha por propagação instável de fissuras que levam ao colapso.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho é implementar o algoritmo para análise de funções de estado limite não lineares que descrevam a ruptura de vigas por propagação instável de trincas. Com isso, objetiva-se a quantificação dos efeitos das diferentes metodologias, e as incertezas dos parâmetros, de dois métodos clássicos de fratura de materiais cimentícios (EEB e MDP) nas predições de confiabilidade estrutural.

Os objetivos específicos desta dissertação são:

- implementar algoritmos eficientes para análises de estados limites não lineares por meio de versões avançadas do FORM.
- avaliar o risco de falha de uma estrutura por meio de um algoritmo de confiabilidade e quantificar o índice de segurança considerando conceitos de mecânica de fratura;
- estudar a relação entre índices de confiabilidade e modelo de efeito de escala em vigas em flexão em três pontos de concreto;
- verificar a influência da consideração de variáveis aleatórias de carregamento, geometria e propriedades dos materiais no cálculo do índice de confiabilidade;
- considerar os estados limites da resistência de com vários tamanhos e geometrias incorporando os modelos de EEB e MDP e como se comparam com a mecânica da fratura linear elástica;
- determinar os índices de confiabilidade para vigas de concreto convencional (CONC) e concreto reciclado (FRAP);
- quantificar a influência da variabilidade estatística dos parâmetros dos materiais obtidos em ensaios de laboratório de concreto convencional e reciclado na predição da falha estrutural;
- realizar simulação de MMC para determinar os tipos de distribuições que apresentam os parâmetros mais importantes relacionados com os modelos de EEB e MDP para o CONC.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

A pesquisa contribui para o estado da arte da análise de confiabilidade da falha de estruturas por propagação instável de trincas utilizando modelos da mecânica da fratura não linear elástica para materiais quasi-frágeis tais como materiais cimentícios. O trabalho contribui para uma análise mais profunda sobre os dois métodos mais utilizados para fratura em concreto (EEB e MDP) e de como suas respectivas metodologias influenciam na predição probabilística de falha estrutural. Além disso, os resultados contribuem para a análise da dependência dos índices de confiabilidade com o efeito de escala e propriedades fundamentais do material determinados por modelos de fratura.

A metodologia empregada permite fazer comparações dos índices de segurança β entre dois materiais de muita utilização na construção atual, tais como concreto comum CONC e concreto reciclado FRAP, determinando qual pode representar maiores níveis de segurança em vigas. Os resultados obtidos poderão auxiliar na elaboração de projetos baseados em mecânica da fratura, pois determinarão as melhores combinações de geometria e propriedades de materiais de uma viga.

1.4 RESUMO DA METODOLOGIA

O presente trabalho inicialmente implementa um algoritmo para análise de funções de estado limite não lineares que descrevam o estado limite de ruptura de vigas por propagação instável de trincas. Os parâmetros de fratura de materiais cimentícios convencionais e reciclados foram determinados de ensaios de laboratório como especificados nos métodos RILEM para os dois modelos clássicos EEB e MDP. A partir destes dados, as análises de confiabilidade consideram funções do estado limite de ruptura e as incertezas de variáveis geométricas, de carregamento e de propriedades de fratura de dois materiais: concreto convencional (CONC) e concreto reciclado (FRAP) em vigas de flexão em três pontos. A confiabilidade da resistência nominal de vigas de vários tamanhos são analisadas. Finalmente, os tipos de distribuição de probabilidade da resistência das vigas são determinadas por meio de simulações do método de Monte Carlo para que apresentam os parâmetros mais importantes relacionados com os modelos de EEB e MDP para o concreto.

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O trabalho está organizado nos seguintes capítulos:

- CAPITULO 2: Revisão bibliográfica de mecânica da fratura, conceitos básicos de estatística, confiabilidade e métodos de confiabilidade.
- CAPITULO 3: Neste capitulo, é descrita a metodologia utilizada para a avaliação de confiabilidade realizada para a flexão de vigas em três pontos (FTP) e elaboradas com concreto convencional (CONC) e com concreto reciclado (FRAP).
- CAPITULO 4: Neste capitulo apresentam-se os resultados das análises de confiabilidade realizados para o concreto convencional CONC e para o concreto reciclado FRAP.
- CAPITULO 5: Neste capítulo apresenta as funções de densidade de probabilidade da resistência de vigas em FTP usando a técnica de simulação do método de Monte Carlo (MMC).
- CAPITULO 6: Apresenta as conclusões, aportes e sugestões para trabalhos futuros relacionados com a pesquisa desenvolvida.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capitulo apresenta-se a revisão bibliográfica para Mecânica da fratura linear elástica e não linear elástica da seção 2.1. até a seção 2.3. e para os conceitos de confiabilidade da seção 2.4. até a 2.7.

2.1 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura descreve a cinética e cinemática de corpos contendo trincas e a consequente propagação destas. O processo de faturamento, ilustrado na Figura 2.1, pode ser classificado em três tipos ou modos;

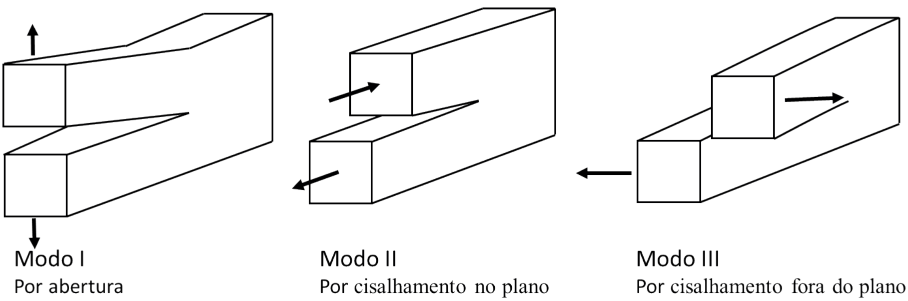


Figura 2.1. Modos de fratura

A lei do efeito de escala para estruturas de concreto para o modelo EEB é usada para conceitos da mecânica da fratura não linear elástica (MFNLE), em modo I de fratura, levando em conta as propriedades de fratura (G_f) e (C). Os mesmos conceitos da MFNLE são usados para propor o MDP, que também prevê o efeito de escala em estruturas de concreto por meio do G_f e do deslocamento ($CTOD_C$). Por outra parte, o conceito de mecânica da fratura linear elástica (MFLE), que assume uma deformação plástica na ponta de fissura, é desenvolvida por Griffith (1920) e também segue a lei de EEB para o parâmetro de fator de intensidade de tensões (FIT).

As seções a seguir descrevem as abordagens para a descrição do processo de iniciação e propagação de trincas utilizadas neste trabalho.

2.2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA (MFLE)

Os critérios usados pela mecânica da fratura linear elástica (MFLE) são baseados em uma propriedade independente, que descreve a resistência ao fraturamento (ou tenacidade) em materiais frágeis: o fator de intensidade de tensões (FIT ou K) ou taxa de liberação de energia (TLE ou G_f) se usadas as formulação de tensões ou de energia, respectivamente.

2.2.1 Fator de intensidade de tensão (FIT ou K)

As imperfeições geométricas na superfície de um corpo gera uma distribuição diferente de tensões. Irwin (1958) indica que o FIT depende da geometria e da tensão induzida (σ) pela carga atuante no corpo sólido. Para este trabalho em particular se considerado somente o modo I de fraturamento (por abertura). Neste caso, o FIT (K_I) pode ser expresso como:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{D}\right) \tag{2.1}$$

Em que α_0 é o comprimento inicial da fissura, *D* é a dimensão do corpo na direção da fissura; e $f(\alpha_0/D)$ uma função que relaciona α_0 e *D* denominada como fator geométrico, que depende da geometria de cada corpo em questão. Para uma placa submetida a uma tensão uniaxial, como ilustra a Figura 2.2 e a Equação (2.2):

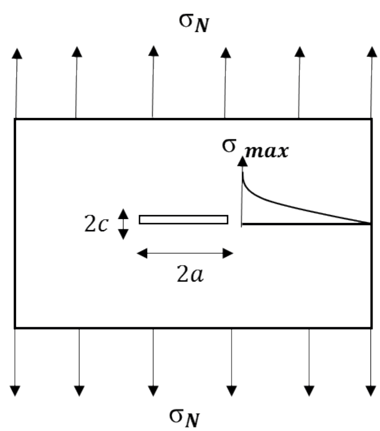


Figura 2.2. Placa submetida a uma tensão uniaxial

$$f\left(\frac{a}{D}\right) = \sqrt{sec\left(\frac{\pi a}{2D}\right)} \tag{2.2}$$

Para tensão uniaxial com eixo simples de fissura ilustrada na Figura 2.3 e na Equação (2.3) tem-se:

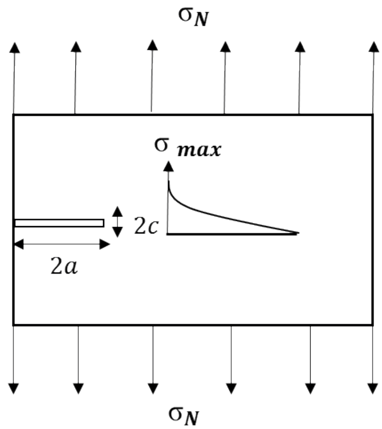


Figura 2.3. tensão uniaxial com eixo simples de fissura

$$f\left(\frac{a}{D}\right) = 1.12 - 0.231\frac{a}{D} + 10.55\left(\frac{a}{D}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{D}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{D}\right)^4 \quad (2.3)$$

$$f\left(\frac{a}{D}\right) = \frac{1.99 - \left(\frac{a}{D}\right)\left(1 - \frac{a}{D}\right)\left[2.15 - 3.93\left(\frac{a}{D}\right) + 2.70\left(\frac{a}{D}\right)^2\right]}{\sqrt{\pi}\left(1 + 2\frac{a}{D}\right)\left(1 - \frac{a}{D}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4)$$

A Equação (2.4) corresponde a uma viga de flexão em três pontos ilustrada na Figura 2.4:

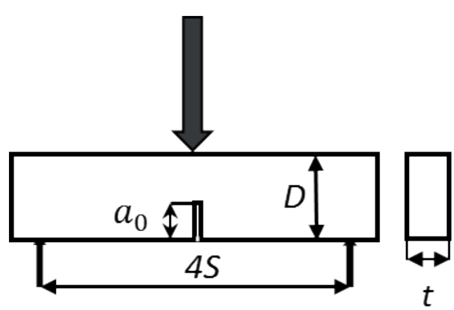


Figura 2.4. viga de flexão em três pontos

É importante mencionar que Tada *et al*. (2000) apresenta $f\left(\frac{a}{D}\right)$ para diversas geometrias e carregamentos.

A Equação (2.1) pode ser expressa em termos da tensão máxima induzida (resistência do corpo) como:

$$\sigma_r = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a_0} f\left(\frac{a}{D}\right)} \quad (2.5)$$

Em que K_{Ic} é denominado de fator de intensidade crítico ou tenacidade à fratura (no modo I) que é considerado uma propriedade fundamental do material. Note que este fator é o valor limite (crítico) para que a trinca de tamanho *a* se propague instavelmente. Consequentemente, a tensão induzida σ_r é a máxima tensão suportada pelo corpo (resistência) para que occorra a propagação instável.

2.2.2 Taxa de liberação de Energia de fratura

Griffith (1921) estabelece a descrição da MFLE por meio do conceito de energia de propagação de fissuras, G_I, que é também conhecida como a taxa de liberação de energia. Esta é também função da geometria da estrutura e da tensão induzida pelo carregamento. Para este estudo denomina-se G_I como para modo I de fratura. Além disso, G_I é também relacionado com K_I, para materiais elásticos, por meio da expressão:

$$G_I = \frac{{K_I}^2}{\bar{E}} \tag{2.6}$$

Em que $\bar{E} = E$ para o caso de estado plano de tensão; e $\bar{E} = E/(1-\upsilon^2)$ para o estado plano de deformação; E é o módulo de elasticidade; e υ é o coeficiente de Poisson. Do mesmo modo, uma propriedade do material denominada energia de fratura ($G_f = G_{IC}$), que é a energia G_I crítica para a propagação instável, e é relacionada com o fator de intensidade de tensão crítico por:

$$K_{IC} = (G_f\bar{E})^{1/2} \tag{2.7}$$

O K_{IC} é assumido instável para o caso de estado plano de tensão onde $\bar{E} = E$. Substituindo a Equação (2.1) temos:

$$\sigma_r = \frac{(G_f\bar{E})^{1/2}}{\sqrt{\pi a_0}f\left(\frac{a}{D}\right)} \tag{2.8}$$

em que σ_r é a tensão máxima induzida no corpo para que occorra a propagação instável da trinca.

Apesar de largamente aplicada, a MFLE só é adequada para materiais elásticos e que não exibam nenhum, ou desprezível, comportamento não linear na ponta da fissura. A maioria dos materiais da engenharia, exibe comportamento não linear na ponta da fissura, denominada zona de processo, em condições normais de operação. Nestes materiais a MFLE não pode ser aplicada, e teorias mais sofisticadas devem ser utilizadas. No caso de materiais cimentícios, a zona de processo na frente da trinca não é desprezível, e faz com que esses materiais apresentem comportamento quasi-frágil.

2.3 MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR ELÁSTICA (MFNLE)

O concepto de trinca equivalente é abordado por dois modelos representativos da mecânica da fratura que são o (MDP) e (EEB). Estes modelos de trincas equivalentes, em lugar do comprimento original da trinca utilizam um comprimento de trinca equivalente que pode prescrever-se explicitamente como o parâmetro (*C*), e Wells (1961) evidencio que as faces da trinca movimentavam-se com deformação plástica o que permitiu-lhe desenvolver um parâmetro que conhecido como o deslocamento da apertura do frente de trinca (*CTOD*).

A equivalência é possível devido a que o comprimento da trinca é conhecida e estável antes que o concreto seja submetido ao carregamento máximo, e o comprimento critico equivalente para a falha do concreto é diferente ao comprimento inicial da trinca. Para predizer a falha do concreto é necessário conhecer a carga crítica e o comprimento de trinca correspondentes

2.3.1 Modelo do Efeito de Escala de Bazant (EEB)

O modelo do Efeito de Escala de Bazant (EEB) analisa o comportamento não linear da fratura em uma estrutura de concreto, com uma força ou tensão de carregamento máximo, em função do tamanho da estrutura. A derivação detalhada do modelo pode ser encontrada em (Bazant, 1984; Bazant e Kazemi, 1990; Bazant e Planas, 1997). Entretanto a principal equação do EEB relacionando a resistência nominal de um membro estrutural, σ_r, com as propriedades de fratura do material, dimensões e geometria da estrutura taxa de liberação de energia de fratura G_f e o comprimento crítica da região de fratura *C* é:

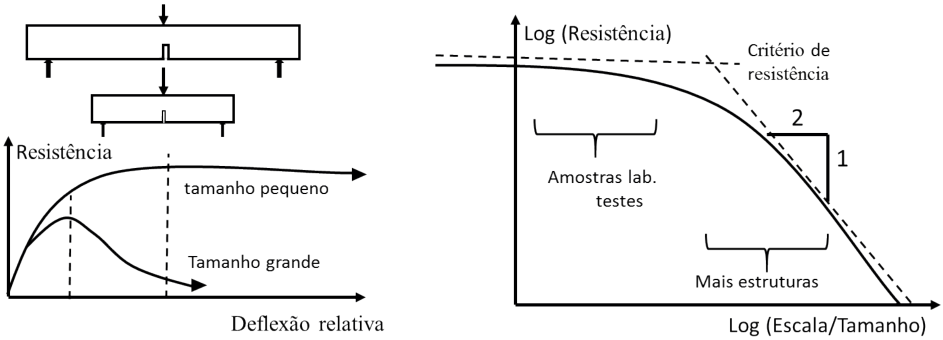
$$\sigma_r = \left(\frac{G_f E}{Dg(\alpha) + Cg'(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Em que *C* é uma propriedade do material que representa o comprimento equivalente da ZPF do material; *D* é uma dimensão característica (tamanho) da estrutura, $\alpha = \frac{a}{D}$; a é um comprimento de trinca na estrutura, e $g(\alpha)$ é um fator geométrico dado por:

$$g(\alpha) = \Pi\alpha[f(\alpha)C_n]^2 \quad (2.10)$$

Em que C_n é uma constante que relaciona σ_r e *D* que depende das dimensões e tipo de geometria; e $f(\alpha)$ é a função geométrica da MFLE. É importante salientar que a Equação (2.9), devido á forma de *E,* é somente válida para o estado plano de tensão.

Onde $g'(\alpha)$ faze referencia á derivada da função $g(\alpha)$ descrita na Equação (2.10).



(a) curvas do ensaio (b) curvas de resistência com efeito de escala

Figura 2.5. Modelo do efeito de escala de Bazant (EEB) com : a) curvas do ensaio de resistência nominal vs. deflexão relativa, e (b) escala logarítmica da resistência nominal vs. escala / tamanho . Adaptado de ACI comitê 446 1992)

O (EEB) é definida pela comparação de estruturas de geometria similar de diferentes tamanhos. É importante definir que o termo σ_r representa o valor da resistência nominal no máximo valor do carregamento antes da falha instável carregamento (último) P_u. A Figura 2.5 para a estruturas geometricamente similares de diferentes tamanhos descreve o comportamento típico das curvas de esforço vs. deflexão, como é ilustrado a falha ocorre perto do pico, com os incrementos de tamanho. Este efeito pode predizer a fratura mecânica a partir do facto que para estruturas mais grandes tem-se uma maior energia de deformação que incrementa a propagação da zona de falha.

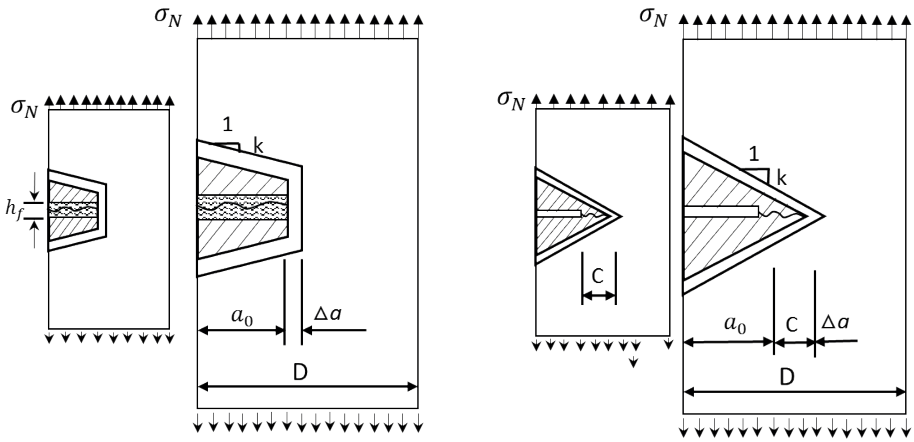
Em que σ_N para a lei de efeito escala pode ser expressa como:

$$\sigma_r = \frac{Bf_t'}{\sqrt{1 + D/D_0}} \tag{2.11}$$

$$Bf_t' = \left\lfloor \frac{G_f\, E}{g'(\alpha)C} \right\rfloor^{1/2} \tag{2.12}$$

$$D_0 = \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}C \tag{2.13}$$

Em que f_t' é um esforço de tensão do material usado apenas para fins dimensionais, B é uma constante adimensional, e D_0 é uma constante com a dimensão de comprimento. B e D_0 dependem de das propriedades das propriedades de fratura do material e da fator geometria da viga.



(a) trinca *blunt* (b) trinca *sharp*

Figura 2.6. Idealização da zona de processo para a) trinca *blunt* b) trinca *sharp*. Adaptado de ACI comitê 446 1992.

Na Figura 2.6 a zona de processo de fratura considerada na ponta de uma trinca contínua, de extensão finita pode, por aproximação, ser considerada constante. Para a trinca *sharp* da Figura 2.6b, tensão normal transversal diminui gradualmente a partir de f_t' até 0 ao longo do comprimento da zona de processo. Por causa da presença desta zona da trinca elasticamente equivalente, gera-se a liberação de energia de deformação do material que produz um incremento no comprimento efetivo de trinca a_0, e que é assumido por o comprimento *C*, considerado como uma constante do material.

O EEB também é usado apara a determinação das propriedades de fratura do material, G_f e *C*. A metodologia de ensaio é normatizada em uma norma (RILEM 1990a) para vigas com entalhe central, a_0, submetidas à flexão em três pontos FTP como ilustrado pela Figura 2.7. As vigas têm altura *D*, vão *S* e espessura *t*. Basicamente o ensaio consiste em medir os máximos carregamentos, *P*, de vigas de três alturas/tamanhos (*D*), mas geometricamente similares (mesmos).

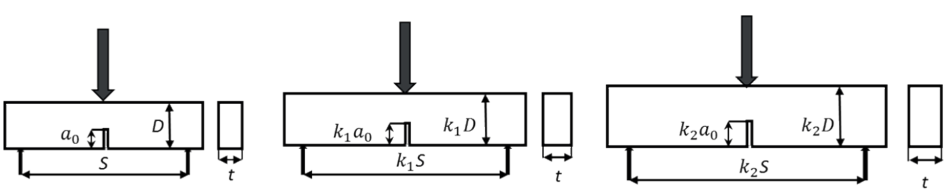


Figura 2.7. Configurações do ensaio do EEB para vigas em flexão em três pontos. Adaptado de Bazant *et al.* (1997)

O carregamento máximo final (P_J^0) pode ser obtido tomando o peso do corpo de prova em conta.

$$P_J^0 = P_j + \frac{S_j}{2L_j} W_j \tag{2.14}$$

Em que P_j é o carregamento máximo medido no ensaio, S_j o vão, L_j comprimento total e W_j o peso da viga *j*.

$$Y_j = \left(\frac{D_j t}{P_j{}^0}\right)^2 \tag{2.15}$$

Fazendo $X_j = D_j$ para *j = 1, 2, 3,..,n,* podemos estabelecer uma regressão linear definida como Y = Ax + B_0. Os valores da inclinação A e o ponto de intercepção B_o são:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2} \tag{2.16}$$

e

$$B_0 = \bar{Y} - A\bar{X} \tag{2.17}$$

Em que os centroides, ou médias aritméticas, de todos os pontos dos dados são:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j) \tag{2.18}$$

e

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j) \tag{2.19}$$

Para o caso das vigas da Figura 2.7, o valor de $f(\alpha_0)$, e consequentemente $g(\alpha_0)$, depende da razão *S/D*. O fator geométrico $f(\alpha_0)$ para vigas com *S/D = 4* é:

$$f\left(\alpha_0 = \frac{a_0}{D}\right) = \frac{1.99 - \left(\frac{a_0}{D}\right)\left(1 - \frac{a_0}{D}\right)\left[2.15 - 3.93\left(\frac{a_0}{D}\right) + 2.70\left(\frac{a_0}{D}\right)^2\right]}{\sqrt{\Pi}\left(1 + 2\frac{a_0}{D}\right)\left(1 - \frac{a_0}{D}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.20}$$

Os valores de G_f podem ser determinados por:

$$G_f = \frac{g(\alpha_0)}{EA} \tag{2.21}$$

O valor do comprimento equivalente da ZPF, *C*, é por sua vez obtido por:

$$C = \frac{g(\alpha_0)B_o}{g'(\alpha_0)A} \tag{2.22}$$

O carregamento máximo medido no ensaio (P_j) se relaciona com a resistência nominal da viga em flexão em três pontos (FTP), com a altura *D* pela relação:

$$\sigma_{r\,j} = \frac{C_n P_j}{tD} \tag{2.23}$$

Em que:

$$c_n = \frac{3}{2}\frac{S}{D} \tag{2.24}$$

A Equação do EEB pode também ser escrita na forma

$$\sigma_r = \frac{C_n P_r}{tD} = \left(\frac{G_f E}{Dg(\alpha_0) + Cg'(\alpha_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

Onde P_r tem o mesmo sentido que P_j é o máximo carregamento suportado pela viga, ou seja, sua resistência nominal. Analogamente à MFLE também pode fornecer uma relação para a resistência nominal adaptando-se a Equação (2.8):

$$\sigma_r = \frac{C_n P_r}{tD} = \left(\frac{G_f E}{Dg(\alpha_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.26}$$

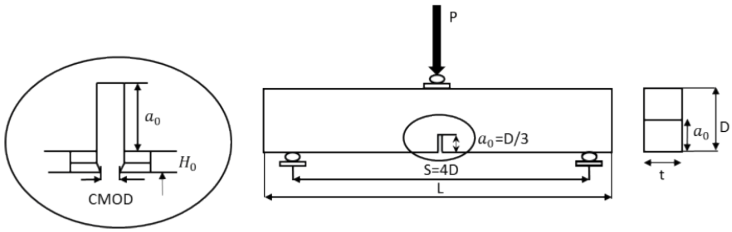
2.3.2 Modelo de dois parâmetros (MDP)

Jenq e Shah (1985) adaptaram o trabalho de Wells (1961) seu modelo considera que a falha estrutural ocorre, quando (i) o FIT atinge o valor crítico K_{IC} e (ii) a abertura da ponta da fissura, aqui chamada de *CTOD (crack tip opening displacement)*, atinge um valor crítico $CTOD_C$. Ou seja:

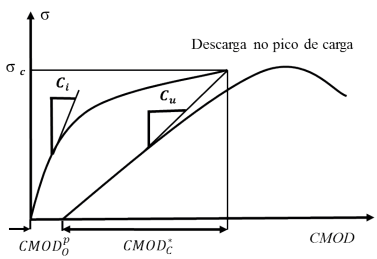
$$K_I = K_{IC} \tag{2.27}$$

$$CTOD = CTOD_C$$

É assumido que, em um corpo sólido com entalhe a_0, estes dois valores críticos são atingidos para um comprimento de trinca equivalente $a_C = a_0 + \Delta a$, em que Δa é um comprimento virtual. Pelo fato de usar duas propriedades de fratura (K_{IC} e $CTOD_C$) este modelo é chamado de modelo de dois parâmetros (MDP). O método usa a curva de carregamento (P) e a abertura da boca da fissura, aqui chamada de *CMOD (crack mouth opening displacement)*. Uma norma (RILEM 1990b) foi desenvolvida para materiais cimentícios utilizando ensaios de flexão em três pontos como ilustrado na Figura 2.8.a. A determinação dos parâmetros K_{IC} e $CTOD_C$ é feita a partir da medida das inclinações das curvas iniciais de carregamento (C_i) e descarregamento (C_u) utilizando as Equações da MFLE.



(a) Configuração da viga



(b) Curvas de carregamento e descarregamento

Figura 2.8. Ensaio para o MDP: (a) configuração da viga de flexão em três pontos; (b) curvas de carregamento e descarregamentos e respectivas inclinações.

Na derivação das equações do MDP, o $CMOD_C$ é dividido em duas partes: uma parcela elástica $CMOD_c^e$; e uma parcela plástica $CMOD_c^p$, de tal foma que:

$$CMOD_C = CMOD_c^e + CMOD_c^p \tag{2.28}$$

Os módulos de elasticidade do material no processo de carregamento e descarregamento, E_i e E_u, respectivamente, podem sere determinados a partir das inclinações $C_{i,}$ C_u (Figura 2.8. b) e as dimensões do corpo de prova nas relações da MFLE:

$$E_i = \frac{6Sa_0}{C_i D^2 t} f_0(\alpha_0) \tag{2.29}$$

e

$$E_u = \frac{6Sa_c}{C_u D^2 t} f_0(\alpha_c) \tag{2.30}$$

Em que *D* é a altura da viga, *t* é a espessura da viga e:

$$(\alpha_0) = \frac{a_0 + H_O}{D + H_O} \tag{2.31}$$

e

$$(\alpha_c) = \frac{a_c + H_O}{D + H_O} \tag{2.32}$$

Em que H_o é a altura da haste de suporte.

O fator geométrico $f_0(\alpha_c)$ e $f_0(\alpha_0)$ é o mesmo nas duas expressões e é definido como:

$$f_0(\alpha) = 0.76 - 2.28\,\alpha + 3.78\alpha^2 - 2.04\alpha^3 + \frac{0.66}{(1-\alpha)^2} \tag{2.33}$$

Igualando as Equações (2.29) e (2.30), tem-se o comprimento de fissura equivalente, a_c:

$$a_c = \frac{C_u a_0 g_2(\alpha_0)}{C_i g_2(\alpha_c)} \tag{2.34}$$

Agora, os valores de K_{IC} e $CMOD_c^e$ *são calculados por meio das equações da MFLE* considerando o comprimento de trinca efetiva a_c e a tensão máxima σ_C:

$$K_{IC} = \sigma_c\sqrt{\pi a_c} f_1(\alpha_c) \tag{2.35}$$

Em que $f_1(\alpha_c)$ é uma função adimensional geométrica.

$$CMOD_c^e = \frac{4\sigma_c a_c}{\mathrm{E}} f_2(\alpha_c) \tag{2.36}$$

Em que $f_2(\alpha_c)$ é uma função adimensional geométrica e E é o módulo de elasticidade.

As Equações (2.35) e (2.36) podem serem formuladas em termos do carregamento máximo, P_c, como:

$$K_{IC} = 3(P_c + 0.5W_h)\frac{S\sqrt{\pi a_c} f_1(\alpha_c)}{2D^2 t} \tag{2.37}$$

Em que $W_h = \frac{W_0 S}{L}$ com W_0 sendo peso da viga.

$$CMOD_c^e = \frac{6(P_c + 0.5W_h) S a_c f_2(\alpha_c)}{E D^2 t} \tag{2.38}$$

O valor do deslocamento crítico da ponta da trinca $CTOD_c$ é determinado por;

$$CTOD_C = CMOD_c^e\, f_3(\alpha_c, \gamma_0) \tag{2.39}$$

Em que $\gamma_0 = a_0/a_C$.

As funções geométricas, f_2 e f_3 para vigas submetidas á flexão em três pontos são fornecidas por Murakami et al. (1987) como:

$$f_1(\alpha_c) = \frac{1.99 - (\alpha_c)(1-\alpha_c)[2{,}15 - 3.93(\alpha_c) + 2.70(\alpha_c)^2]}{\sqrt{\Pi}(1+2\alpha_c)(1-\alpha_c)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.40}$$

$$f_2(\alpha_c) = \frac{1.73 - 0.85(\alpha_c) + 31.2(\alpha_c)^2 - 46.3(\alpha_c)^3 + 2.70(\alpha_c)^4}{(1-\alpha_c)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.41}$$

$$f_3(\alpha_c, \gamma_0) = \sqrt{(1-\gamma_0)^2 + (1.081 - 1.149\alpha_c)(\gamma_0 - {\gamma_0}^2)} \quad (2.42)$$

De acordo com Shah *et al.* (1994), o comprimento equivalente da ZP () utilizado no EEB pode ser relacionado com o $CTOD_C$ por meio da expressão da viga de flexão em três pontos FTP:

$$C = \frac{0.061\, CTOD_c^2 E}{G_f} - 0.54 a_0 + \sqrt{0.292\, {a_0}^2 + \frac{CTOD_c^2 E a_0}{G_f} + 0.0038\left(\frac{CTOD_c^2 E}{G_f}\right)^2} \quad (2.43)$$

Em que G_f é calculado por meio da MFLE com a Equação (2.7) e K_{IC} determinado pela Equação (2.35) ou (2.37)

Então, a Equação (2.25) da predição do EEB pode ser usada com os valores de G_f e C calculados a partir do K_{IC} e do $CTOD_C$ determinados pelo MDP.

2.4 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Na engenheira o projeto de dimensionamento por exemplo, deve proporcionar aos elementos e aos sistemas estruturais critérios de segurança e de serviço da estrutura baixo à demanda de durabilidade. Além disso boa parte dos parâmetros relacionados com o design sempre apresentam numerosas incertezas, pelo que é necessário quantificar estas incertezas por meio de métodos de confiabilidade, que medem estas incertezas através de índices de confiabilidade e determinam os níveis de segurança, identificando os porcentagens de probabilidade que tem o sistema ou elemento de falhar.

Alguns de os autores da literatura probabilística que estudam diferentes métodos de confiabilidade são Haldar e Mahadevan (2000), Hasofer e Lind (1974), Melchers (1987), Choi, Canfield e Grandhi, (2005) e Nowak e Collins, 2013.

Haldar e Mahadevan (2000) fazem o desenvolvimento das etapas principais para quantificação de incertezas, em casos que as fontes de incerteza são incógnitas, sendo necessária informação adicional. Por exemplo, para avaliar a incerteza de qual é a máxima velocidade do vento de uma cidade em um ano, precisa-se reunir os dados dos maiores valores encontrados em anos anteriores, que podem ser reunidos em *n* grupos de anos, para *n* amostras. Inicialmente, são necessárias informações estatísticas que podem ser obtidas do quadro mostrado na Figura 2.9. A informação reunida é chamada espaço de características de aleatoriedade e pode ser representado em um histograma de frequência. O diagrama de frequência pode ser obtido de um jeito mais simples, aplicando a teoria de Função de Densidade de Probabilidade (FDP).

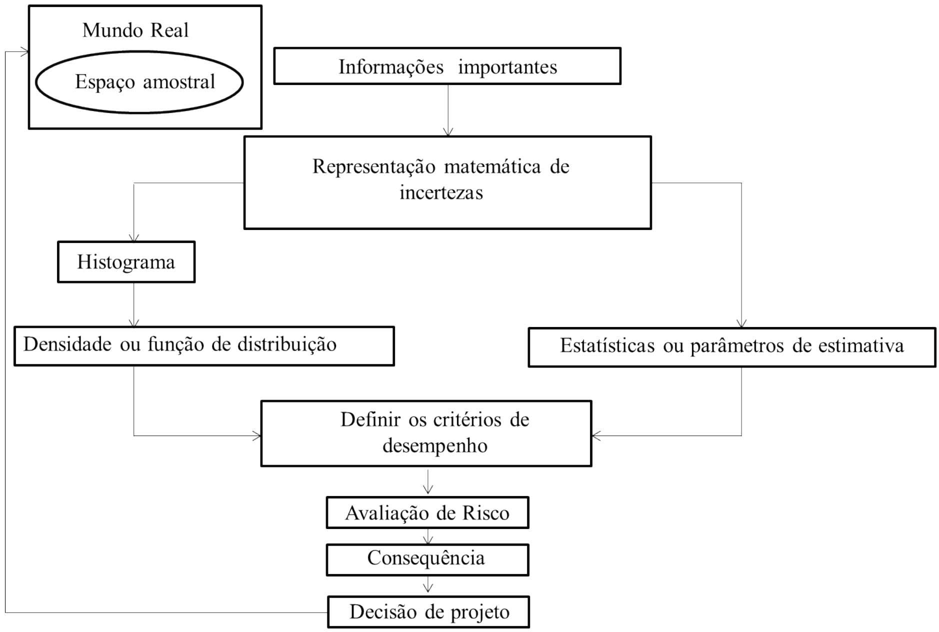


Figura 2.9. Passos de um estudo probabilístico. Modificado Haldar e Mahadevan (2000).

Na avaliação de confiabilidade, os conceitos de estados limites são utilizados para ajudar na definição falha. Estes limites são considerados a fronteira entre os desempenhos desejados e não desejados para uma estrutura. Este limite é comumente representado matematicamente como uma função de desempenho ou função de estado limite. A teoria de probabilidade fornece bases precisas para medir a porcentagem de probabilidade em relação aos estados limites, assumindo um sistema em que suas variáveis sejam aleatórias e não mais determinísticas. Em casos mais simples, os estados limites são uma margem de segurança entre R (resistência ou capacidade) e Q (solicitação ou demanda). O estado limite da função $g(.)$ é então definido em termos de $R(.)$ e $Q(.)$, que são funções de um vetor de variáveis aleatórias $\boldsymbol{X}$, onde:

$$g(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X}) - Q(\boldsymbol{X}) \qquad (2.44)$$

Com a probabilidade de falha, P_f , expressa como:

$$P_f = P[g(\boldsymbol{X})<0] \qquad (2.45)$$

Em que $g(\boldsymbol{X})<0$ é a região de falha; $g(\boldsymbol{X}) = 0$ é a superfície limite de falha; e $g(\boldsymbol{X}) > 0$ é a região de segurança.

2.4.1 Conceitos de estatística

Para quantificar as incertezas, é importante saber avaliar os riscos decorrentes da utilização de informações provenientes de observações, com base nos conceitos de teoria da matemática, a probabilidade, modelagem das incertezas em variáveis continua e discretas, determinação da distribuição e os parâmetros. Pode-se definir que as variáveis aleatórias são valores mensuráveis no espaço de probabilidade de experiências associadas com eventos.

Ao analisar um evento, pode-se observar que não existem valores máximos e mínimos absolutos, pois os valores alteram-se de acordo com a quantidade dados. Para melhorar os problemas de valores máximos e mínimos, trabalha-se com o cálculo de uma média. Desta forma, utiliza-se um intervalo variável *X*, com *n* observações, onde a média é uma medida de tendência central dos dados, escrita como μ_x, que pode ser calculada para *n* observações, conforme Equação (2.46).

$$E(X) = \mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.46}$$

A média (μ_x) pode ser expressa em termos de variação, desvio padrão e o coeficiente de variação (CV). A variação de *X* é denominada também como segundo momento central que é expresso:

$$\sigma_{(X)}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 \tag{2.47}$$

O desvio padrão expresso como σ_x fica nas mesmas unidades da média e é considerado a medida mais comum da dispersão estatística.

O coeficiente de variação adimensional consiste em uma relação entre o desvio padrão e a média.

$$\mathrm{CV(X)} = \delta = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \tag{2.48}$$

O diagrama de frequência, representado por um histograma, tem como objetivo marcar a forma da curva modelo que servirá para a determinação da Função de Densidade de Probabilidade (FDP) representada como $f_X(x)$ como mostrasse na Figura 2.10.

Pode-se também complementar esta informação, representado graficamente a informação em um histograma. A área abaixo da curva dependerá da largura dos intervalos e do número de pontos designados, pela probabilidade do evento acontecer entre 0 e 1. Matematicamente, isto é muito vantajoso porque a área total é igual a uma unidade. Assim, um histograma de unidade 1 é denominado como diagrama de frequência que é obtido por meio do diagrama de frequência ordinário dividido pela área.

Outra maneira de descrever a distribuição de probabilidade para as variáveis aleatórias discretas e contínuas é a Função de Distribuição Acumulada (FDC) ilustrada na Figura 2.11, $F_X(x)$. O FDC é definido para todos os valores de variáveis aleatórias *X* de -∞ ate ∞ que é igual à probabilidade de *X* ser menor ou igual a um valor *x*. Para uma variável aleatória contínua, $F_X(x)$ é calculada integrando a FDP para todos os valores de *X* menores ou iguais a *x*.

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx \tag{2.49}$$

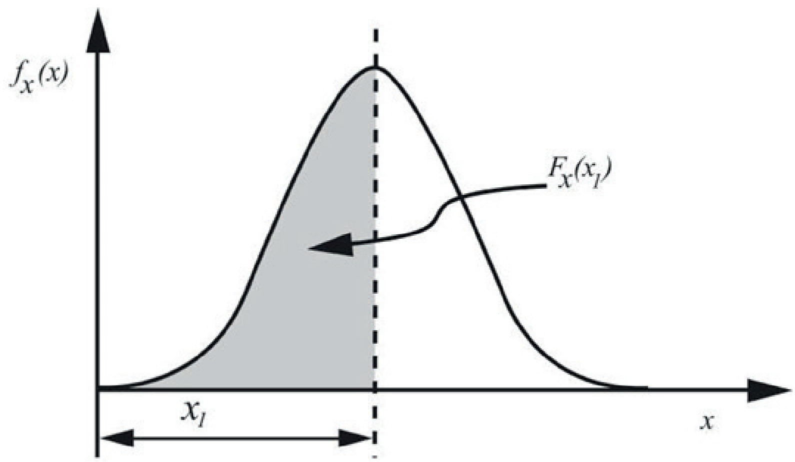


Figura 2.10. Função de densidade de probabilidade (FDP).

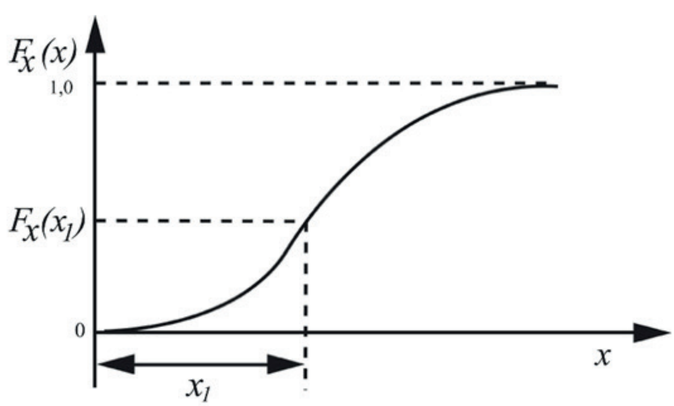


Figura 2.11. Função de distribuição acumulada (FDC)

O FDC das variáveis aleatórias discretas, pode ser matematicamente expresso assim:

$$F_X(X) = P(X \leq x) = \sum_{xi \leq x} px(xi) \tag{2.50}$$

Haldar e Mahadevan (2000) discutem em detalhe estes conceitos de estatística e ademais escreveram o livro de risco e avaliação de confiabilidade.

2.4.2 Tipos de Distribuições Continuas

Comumente, as variáveis aleatórias discretas e continuas são estudadas separadamente e, além disso, buscam fazer uma classificação do tipo de distribuições. A seleção da função de distribuição é muito importante para conhecer as características de probabilidade de um sistema estrutural.

<u>Distribuição normal ou Gaussiana</u>

Gauss (1800) estudou a distribuição normal ou Gaussiana, sendo esta uma das mais comuns e usadas em problemas estatísticos de engenharia, onde o FDP pode ser calculado como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}.\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \qquad -\infty < x < +\infty \tag{2.51}$$

Na Equação (2.51) e (2.52) tem-se que: μ_x é a média e σ_x o desvio padrão. O FDC pode ser calculado como se expressa na Equação 2.53.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}.\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] dx \tag{2.52}$$

A distribuição normal é escrita como N (μ, σ) e tem características que facilitam o trabalho por suas propriedades, sendo aplicada para intervalos variáveis de -∞ até ∞. Esta distribuição é simétrica com respeito ao valor médio. Também os valores modais são idênticos e podem ser designados diretamente dos dados. Nem sempre é possível estimar a probabilidade integrando a Equação (2.51) e nesse caso, é necessário a transformação das variáveis aleatórias *X* em variáveis normal padrão, com média zero e desvio padrão igual a 1, denotado como N(0,1).

$$s = \frac{x-\mu}{\sigma_x} \tag{2.53}$$

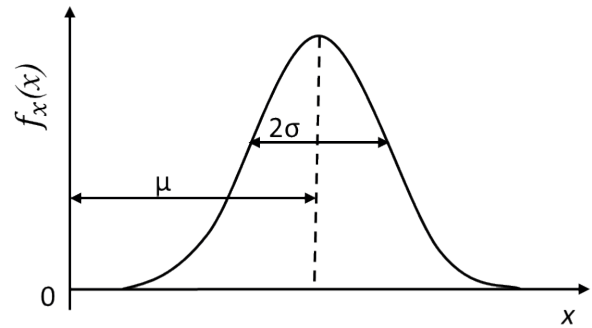


Figura 2.12. Distribuição normal

Após transformar as variáveis em normal padrão, a Equação (2.51) pode expressar o FDP de *s* como:

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) \qquad -\infty < s < +\infty \tag{2.54}$$

Para o gráfico de FDC de *S* está expressa:

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds \tag{2.55}$$

O FDC também é escrito como ϕ(s), onde ϕ(s) = $F_S(S)$ Equação (2.55). A distribuição normal padrão é simétrica, como pode ser mostrado na equação a seguir:

$$\phi(s) = 1.0 - \phi(s) = P_f \tag{2.56}$$

<u>Distribuição lognormal.</u>

A distribuição lognormal foi proposta por Galton (1879). Em algumas situações, trabalha-se apenas com valores positivos devido à natureza do problema. Neste caso, é melhor utilizar distribuição lognormal que limita as variáveis aleatórias positivas e elimina qualquer possibilidade de valores negativos. Para distribuição lognormal, tem-se logaritmo natural com uma distribuição normal, ou seja, *x* é lognormal se *y* = *Ln*(*x*) fosse normal. Então, para uma distribuição lognormal o PDF está expresso da seguinte maneira:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi x}} exp\left[-\frac{1}{2}.\left(\frac{\mathrm{Ln}\,x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], 0 \leq x < +\infty \tag{2.57}$$

Onde:

$$\sigma_y{}^2 = Ln\left[\left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2 + 1\right] \tag{2.58}$$

$$\mu_Y = Ln\ \mu_X - \frac{1}{2}{\sigma_y}^2 \tag{2.59}$$

Da Equação (2.57), e μ_Y e σ_Y são dois parâmetros da distribuição lognormal, denominados média e desvio padrão, respectivamente. As variáveis lognormal têm valores entre $0 \leq x < +\infty$, com FDP assimétrico, onde a média e os pontos modais esperados são diferentes da distribuição normal.

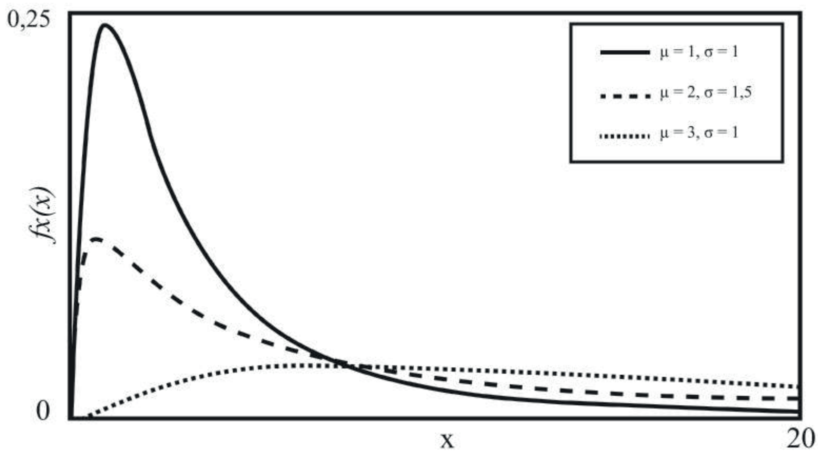


Figura 2.13. FDP lognormal

Os σ_Y e μ_Y são o desvio e a média equivalente e o FDC da distribuição lognormal é denotada pela Equação (2.60).

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}\frac{1}{x}exp\left[-\frac{1}{2}.\frac{(\ln x - \mu_Y)^2}{2{\sigma_Y}^2}\right] \tag{2.60}$$

Distribuição Uniforme.

Nesta distribuição, a função de densidade é “plana” e contínua, portanto a probabilidade é uniforme em um intervalo fechado [A*, B*].

Para o intervalo [A*, B*], a variável uniforme contínua *X* dentro do intervalo está definida como:

$$f(x; A^*, B^*)\begin{cases}\frac{1}{B^* - A^*}; A^* \leq x \leq B^* \\ 0 \quad \text{em outro caso}\end{cases} \tag{2.61}$$

A função de densidade da Figura 2.14 apresenta uma forma retangular com altura constante $\frac{1}{B^*-A^*}$ e base B^* - A^*.

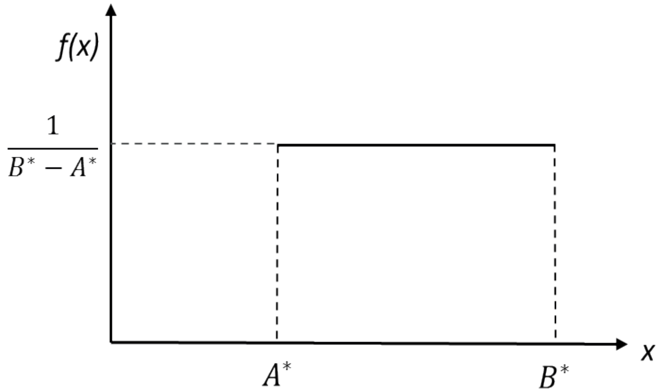


Figura 2.14. FDP uniforme.

A média e a variância são, respetivamente:

$$\mu = \frac{A^* + B^*}{2} \tag{2.62}$$

$$\sigma^2 = \frac{(B^* - A^*)^2}{12} \tag{2.63}$$

Distribuição Gamma.

A distribuição gamma é uma função de densidade que tem muitas aplicações, como, a exemplo, a distribuição exponencial que é um caso particular da distribuição gamma. Esta distribuição é muito usada em sistemas elétricos com tempos de operação variáveis. A distribuição gamma deriva-se da função matemática gamma.

A função gamma é definida por:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\, e^{-x}, \text{ para } \lambda > 0 \tag{2.64}$$

Com a FDP da distribuição gama apresentada na Figura 2.15 e com os parâmetros λ e γ a variável aleatória *X* tem uma distribuição gamma se a função de densidade está denotada por:

$$f(x,\lambda,\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^\lambda \Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x/\gamma} & x > 0 \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \tag{2.65}$$

Onde $\lambda > 0$ e $\gamma > 0$.

A média e a variância da distribuição gamma é definida por:

$$\mu = \lambda\gamma \tag{2.66}$$

$$\sigma^2 = \lambda\gamma \tag{2.67}$$

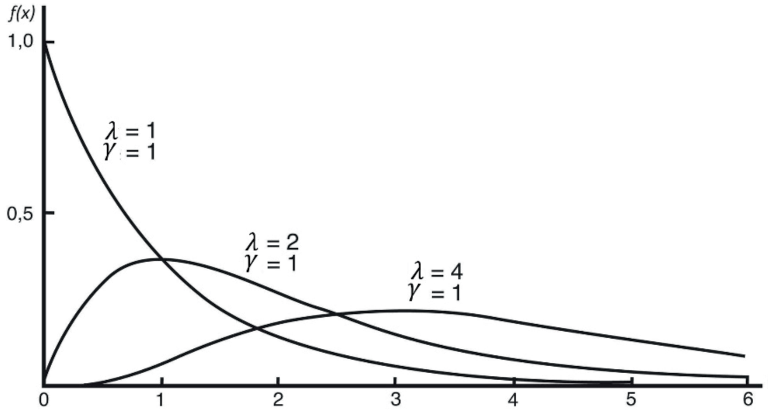


Figura 2.15. FDP gamma.

Distribuição t.

A distribuição normal trabalha com o conhecimento da média e o desvio padrão da população. É mais relevante saber o valor da média μ, que o valor do desvio padrão σ, porque com o desvio padrão pode ser assumido nos caso que tenha um amplo conhecimento do processo das amostras estudadas. Além disso, o valor σ também pode ser estimado a partir do valor médio amostral. Para μ, tem se que:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x/\sqrt{n}} \quad (2.68)$$

S_x é análogo à σ, na Equação (2.68). A distribuição t desvia-se de forma parecida à distribuição normal. Para amostras grandes com $n \geq 30$, a distribuição t é muito similar à distribuição normal. Para amostras com $n < 30$, é recomendável trabalhar com a distribuição t. Dessa maneira, para uma distribuição t de uma amostra extraída de uma população normal, com v_x graus de liberdade pode escrever-se como:

$$T = \frac{(\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{{S_x}^2 \sigma^2}} = \frac{z}{\sqrt{(v_x/(n-1))}} \quad (2.69)$$

Com uma distribuição normal padrão:

$$V = \frac{(n-1){S_x}^2}{\sigma^2} \quad (2.70)$$

Sendo V uma variável aleatória que segue uma distribuição X^2 chi quadrada com $v_x = n - 1$ graus de liberdade.

É com $\bar{x}$, Z, V, S_x^2 variáveis independentes, onde Z é uma variável aleatória normal padrão. A variável T pode ser expressa como:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/v_x}} \tag{2.71}$$

E sua FDP é dada por:

$$h(t) = \frac{\Gamma[(v_x+1)/2]}{\Gamma(v_x/2)\sqrt{\pi v_x}}\left(1 + \frac{t^2}{v_x}\right)^{-(v_x+1)/2}, -\infty < t < \infty \tag{2.72}$$

A Figura 2.16 apresenta a distribuição t com v_x graus de liberdade.

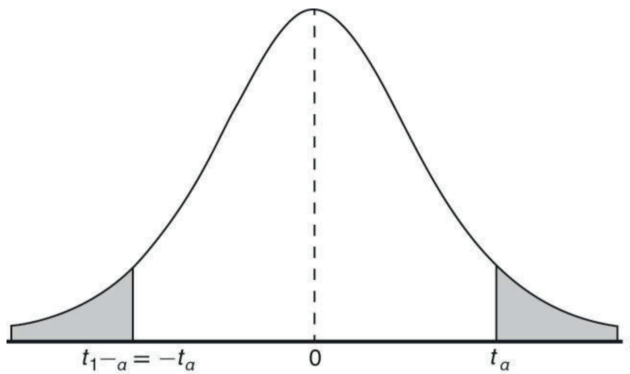


Figura 2.16. FDP t.

Distribuição t-local com fator de escala

A distribuição t-local com fator de escala é útil para modelar distribuições de dados com caudas mais pesadas que a distribuição normal. A distribuição t-local escala aproxima-se da distribuição normal como v_x se aproxima do infinito, e para menores valores de v produzir caudas mais pesadas.

A função de densidade probabilidade da distribuição t-local escala está expressa:

$$\frac{\Gamma[(v_x+1)/2]}{\sigma\sqrt{\pi v_x}\Gamma(v_x/2)}\left(\frac{v_x + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{v_x}\right)^{-(v_x+1)/2} \tag{2.73}$$

Onde Γ é a função gamma, μ é um parâmetro local, σ é um parâmetro local e v_x é um parâmetro de forma.

A média da distribuição t-local escala é o parâmetro local μ. Onde A média é definida apenas para valores de parâmetros forma $v_x > 1$. Para os outros valores de v_x, a média é indefinida.

A variância da distribuição t-local escala está definida:

$$\sigma^2 = \sigma^2 \frac{v_x}{v_x - 2} \tag{2.74}$$

Onde μ é um parâmetro local e v_x é um parâmetro de forma.

Valor extremo generalizado.

Para a distribuição de valor extremo generalizado (VEG), a função de densidade probabilidade com os parâmetros μ, σ e parâmetro de forma k_x pode ser expressa como:

$$y = f(\,x|k_x,\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) exp\left[-\left(1 + k_x \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{k_x}}\right]\left(1 + k_x \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^{1-\frac{1}{k_x}} \qquad (2.75)$$

Para $k_x > 0$ corresponde ao caso Tipo II, para o fator $k_x < 0$ correspondente ao caso Tipo III e $k_x = 0$ caso Tipo I, onde a função de densidade está expressa:

$$y = f(\,x|0,\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) exp\left[-exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right) - \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right] \qquad (2.76)$$

Sendo k_x o parâmetro de forma que mede a dispersão.

A distribuição de valor extremo generalizado a é utilizada para eventos nos quais se tem um valor más pequeno o um maior valor entre um conjunto de valores aleatórios independentes.

O valor extremo generalizado mistura três distribuições simples, permitindo uma categoria continua de possíveis formas incluído três das distribuições mais simples.

Pôr o teorema do valor extremo da distribuição GEV é a distribuição limite normalizada de máximos de um conjunto de variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídos. A distribuição GEV utiliza-se como uma aproximação para modelar os máximos de eventos de variáveis aleatórias.

Os três casos da distribuição de valor extremo generalizado fazem referência aos tipos I, II, y III. As distribuições cujas caudas diminui exponencialmente como normal, levando ao tipo I. As distribuições cujas caudas com diminuição polinomial, tais como t de Student descrevem a tipo II e as distribuições cujas caudas são finitos, tais como beta, levando ao tipo III.

Tipos I, II, y III fazem referência as distribuições de Gumbel, Frechet, e os tipos de Weibull. O Tipo I (Gumbel) e Tipo III casos de (Weibull).

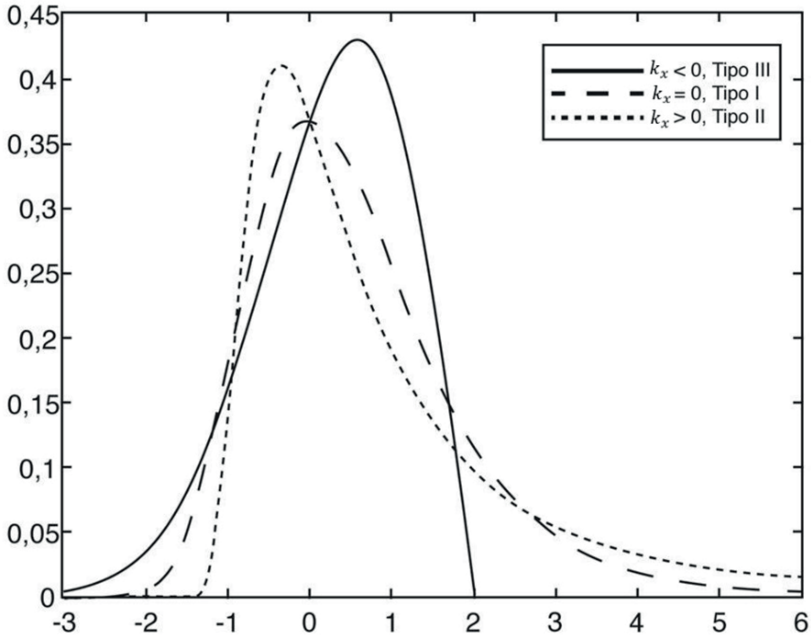


Figura 2.17. FDP Valor extremo generalizado.

***Distribuição Weibull*.**

Weibull (1930) criou a distribuição Weibull, utilizada para sistemas complexos que dependem de vários componentes. Os componentes que constituem o sistema podem falhar por condições ambientais ou por outros parâmetros, que são difíceis de prever.

Com os parâmetros λ e γ a variável aleatória contínua *X* apresenta uma distribuição de Weibull, se a função de densidade é definida por:

$$f(x,\lambda,\gamma) = \begin{cases} \lambda\gamma x^{\gamma-1}e^{-\lambda x^{\gamma}}, & x > 0 \\ 0, \quad em\ outro\ caso \end{cases} \tag{2.77}$$

Para $\lambda > 0$ e $\gamma > 0$.

A média e a variância para a distribuição weibull definem-se, respectivamente:

$$\mu = \lambda^{-1/\gamma}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) \tag{2.78}$$

$$\sigma^2 = \lambda^{-2/\gamma}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right]^2\right\} \tag{2.79}$$

A Figura 2.18 apresenta a FDP que descreve a distribuição Weibull.

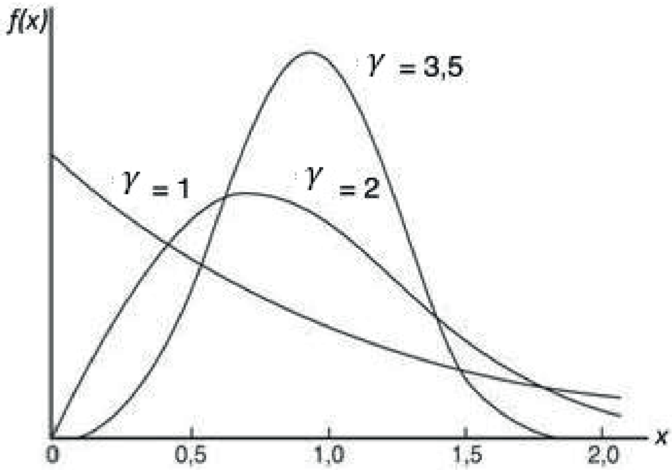


Figura 2.18. FDP Weibull

2.5 MÉTODOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Choi, Grandhi e Canfield (2007) descrevem que existem muitos métodos para fazer análises de confiabilidade, citando-se: segunda ordem, simulação de Monte Carlo, Amostragem Hipercubo Latino e expansão estocástica. A falha estrutural e avaliação de confiabilidade são determinadas para os casos em que o estado limite da função não seja excedido. Estes métodos estão vinculados ao conhecimento da probabilidade de falha e, além disso, é importante conhecer as propriedades estatísticas, tipo de distribuição e os intervalos confidenciais de resposta das estruturas, que tem um papel fundamental na avaliação.

2.5.1 Método FOSM

A formulação original do método FOSM foi escrita por Cornell (1969). O Método de primeira ordem segundo momento simplifica o cálculo da probabilidade de falha. Esse método foi desenvolvido por meio da função de primeira ordem de expansão, com entrada e saída das médias e os desvios padrão. Nesse método, os momentos mais altos que descrevem a inclinação da distribuição são ignorados.

No MVFOSM, a função de estado limite é representada como a primeira ordem de expansão em série de Taylor no ponto de valor médio, assumindo que as variáveis *X* são estatisticamente independentes. A aproximação do estado limite da função e a média são expressas como:

$$\breve{g}(X) \approx g(\mu_X) + \nabla g(\mu_X)^T (X_i - \mu_{Xi}) \qquad (2.80)$$

Então, $\mu_X = \{\mu_{X1,} \mu_{X2,} \mu_{X3}, \ldots \mu_{Xn}\}^T$, onde $\nabla g(\mu_X)$ é o gradiente de g avaliado em μ_X.

$$\nabla g(\mu_X) = \left\{\frac{\partial(\mu_X)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu_X)}{\partial x_2}, \dots . \frac{\partial(\mu_X)}{\partial x_n}\right\}^T \quad (2.81)$$

O valor da média avaliado no estado limite da função é expresso da seguinte forma:

$$\mu_{\hat{g}} \approx E[g(\mu_X)] = g(\mu_X) \quad (2.82)$$

Devido a que a variância do estado limite e a variância do gradiente da função são:

$$\sigma^2_{[g(\mu_X)]} = 0, \sigma^2_{[\nabla g(\mu_X)]} = 0 \quad (2.83)$$

$$\sigma^2_{[\nabla g(\mu_X)^T(X-\mu_X)]} = \sigma^2_{[\nabla g(\mu_X)^T X]} - \mu_X \sigma^2_{[\nabla g(\mu_X)]} \quad (2.84)$$

$$= \sigma^2_{[\nabla g(\mu_X)^T X]} \quad (2.85)$$

$$= \lfloor \nabla g(\mu_X)^T \rfloor^2 \sigma^2_{(X)} \quad (2.86)$$

O estado limite da função $g(\mu_X)$ tem uma variância que é expressa a seguir:

$$\sigma^2_{[\tilde{g}(X)]} \approx \sigma^2_{[g(\mu_X)]} + \sigma^2_{[\nabla g(\mu_X)^T(X-\mu_X)]} \quad (2.87)$$

O desvio padrão da função da aproximação do estado limite se dá por:

$$\sigma_{[\tilde{g}(X)]} = \sqrt{\sigma^2_{[\tilde{g}(X)]}} = \sqrt{[\nabla g(\mu_X)^T]^2 \sigma^2_{(X)}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2_{xi}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.88)$$

Onde o índice de confiabilidade é:

$$\beta = \frac{\mu_{\breve{g}}}{\sigma_{\tilde{g}}} \quad (2.89)$$

Nos casos em que o estado limite da função seja não linear, é preciso fazer uma linearização do estado limite original da função ao ponto médio. Este método é conhecido como o método de valor médio MVFOSM e β é o índice de confiabilidade. Assim, para um espaço n-dimensional com variáveis independentes, a superfície de falha é hiperplana e pode ser expressa como uma função linear de falha pela Equação (2.90).

$$\breve{g}(X) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i \quad (2.90)$$

O índice de confiabilidade para as *n* dimensões é encontrado com as Equações (2.91) e (2.92).

$$\mu_{\tilde{g}} = c_0 + c_1\mu_{x1} + c_2\mu_{x2} + \cdots + c_n\mu_{xn} \quad (2.91)$$

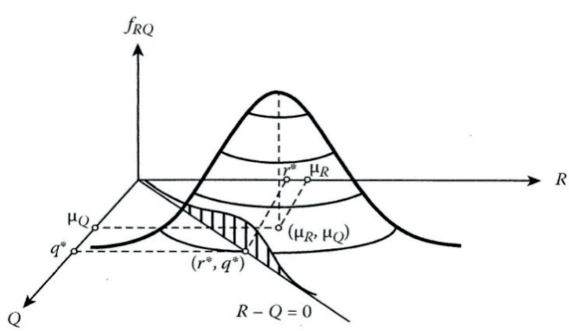
$$\sigma_{\tilde{g}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_{xi}^2} \quad (2.92)$$

O método MVFOSM simplifica os problemas complexos de confiabilidade com a utilização do índice de confiabilidade da Equação (2.89) que está relacionada aos valores de médias e desvios padrão. Ainda, esse método tem dois inconvenientes. O primeiro é que a linearização do estado limite da função ao valor médio pode levar a erros em funções com alta não-linearidade ou para coeficientes de variação grandes.

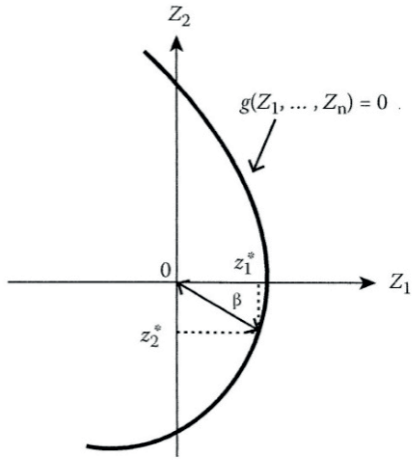
O segundo inconveniente é que o método MVFOSM pode ser invariável em diferentes formulações matematicamente equivalentes do mesmo problema. Isto não é só um problema para formas não lineares de g (.), mas também para certas formas lineares.

2.5.2 Índice de confiabilidade de Hasofer e Lind (HL)

Hasofer e Lind (1974) propuseram um método que avalia *g*(*X*) em um ponto *x** no espaço das variáveis aleatórias que se encontram na superfície do estado limite, como ilustra a Figura 2.19, para uma função linear *g* (*R*, *Q*) de duas variáveis aleatórias *R* e *Q* na forma da Equação (2.44). O ponto de superfície proposto para avaliação de *g* (*R*, *Q*), neste caso, tem as coordenadas (r*, q*) e é chamado ponto de projeto (PP). As coordenadas do PP são determinadas por um procedimento, onde as variáveis aleatórias sofrem uma transformação linear para um espaço de variáveis padronizadas e independentes *Z*. Um índice de confiabilidade, β, é interpretado como a menor distância da origem do espaço transformado até a superfície limite da função *g*(*Z*). No caso de funções *g*(*Z*), não lineares, como ilustra a Figura 2.19b, é necessário o uso de procedimentos de otimização matemática para achar a distância β através de algoritmos iterativos.



(a) Linear



(b)Não linear

Figura 2.19. Funções de estado limite, índice de confiabilidade β e pontos de projeto para (a) função linear *g* (*R*, *Q*) e (b) função não linear *g* (*Z*) no espaço Z. Adaptado de Nowak e Collins (2013).

Pode ser demonstrado que o índice β se relaciona com a probabilidade de falha, P_f, através das seguintes relações:

$\beta = \phi$ -1 (P_f) Ou

$$P_f = \phi(\beta) \tag{2.93}$$

Em que ϕ é a função de distribuição normal padronizada acumulada.

Como exemplo, considere a força *R* e a resistência *Q*, que são normalmente distribuídas e em que as médias μ_R, μ_Q e os desvios σ_R, σ_Q de *R* e *Q,* respetivamente. Então, as variáveis com normalização padrão são:

$$R = \frac{R-\mu_R}{\sigma_R}, Q = \frac{Q-\mu_Q}{\sigma_Q} \tag{2.94}$$

Posteriormente, transforma-se a superfície do estado limite *g* (*R*, *Q*), com coordenadas originais do sistema *(R, Q),* dentro do estado limite de superfície nas coordenadas do sistema padrão normalizadas $(\hat{R}, \hat{Q})$.

$$g\left(R(\hat{R}), Q(\hat{Q})\right) = \hat{g}(\hat{R}, \hat{Q}) = \hat{R}\sigma_R - \hat{Q}\sigma_Q + (\mu_R - \mu_Q) = 0 \tag{2.96}$$

No sistema coordenado $\hat{g}(\hat{R}, \hat{Q})$, a menor distância da origem até a superfície de falha $\hat{g}(\hat{R}, \hat{S})$ = 0, também conhecida como MPP, é o índice $\beta = \widehat{O}P^* = \frac{(\mu_R-\mu_Q)}{\sqrt{\sigma_R{}^2-\sigma_Q{}^2}}$, onde a superfície de falha é a função não linear expressa por:

$$g(X) = g(\{x_1, x_2, ...x_n\}^T) \tag{2.96}$$

Para uma distribuição normal padrão de uma variável u, os valores da média e o desvio padrão são 0 e 1. Logo, a transformação das variáveis utilizando μ_{xi} e σ_{xi} é dada por:.

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{xi}}{\sigma_{xi}} \tag{2.97}$$

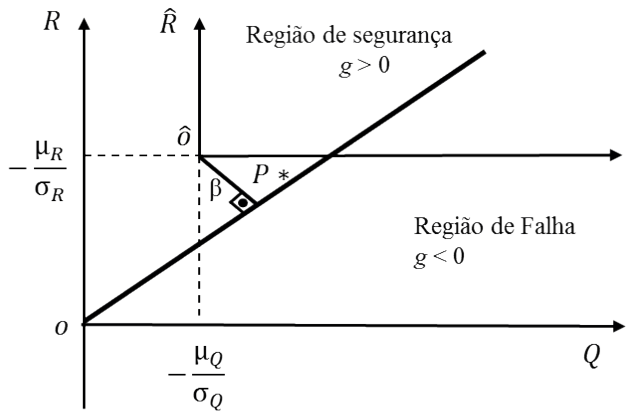


Figura 2.20. Geometria do index de seguridade. Modificado de Choi, Grandhi e Canfield (2007).

A Figura 2.20 apresenta a superfície de falha do espaço *X* é definida no espaço *U* como $g(U) = 0$. O comprimento da origem no espaço U e o ponto $g(U) = 0$ é o desvio padrão do ponto médio no espaço *X* que corresponde ao ponto sobre $g(X) = 0$, onde β é o comprimento da superfície de falha (Equação 2.99).

$$\beta(U) = (U^T U)^{1/2} = ||U||_2,\ U \in g(U) = 0 \tag{2.98}$$

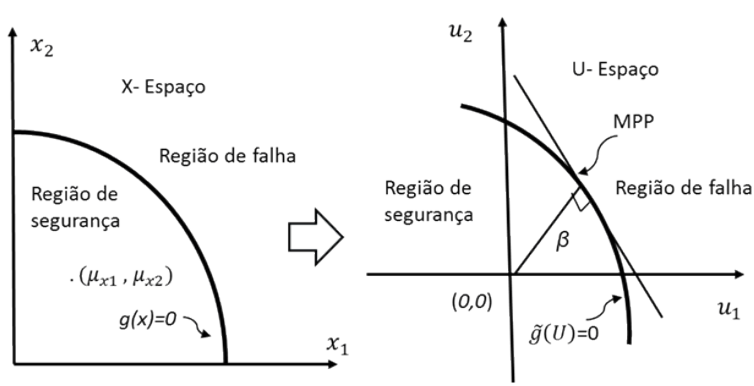


Figura 2.21. Superfície de falha do espaço *X* ao espaço *U*. Modificado de Choi, Grandhi e Canfield (2007).

Na Figura 2.21 ilustra-se o β que é comprimento mais curto entre a origem e à superfície de falha $g(U) = 0$.

$$\beta(U) = \min(U^T U)^{\frac{1}{2}} \tag{2.99}$$

$$U \in g(U) = 0$$

2.5.3 Método de iterativo de Hasofer e Lind (FOSM-HL) para distribuições normais

Hasofer e Lind (1974) propuseram um método iterativo, denominado FOSM-HL que facilita os cálculos de um problema, para resolvê-lo por meio de iterações. No FOSM-HL, assume-se o estado limite da superfície com *n*-dimensões para variáveis aleatórias *X,* normalmente distribuídas e independentes.

Inicialmente assume-se uma função de estado limite normalmente distribuída para a variável aleatória independente *X* como:

$$g(X) = g(\{x_1, x_2, \ldots x_n\}^T) = 0 \tag{2.100}$$

O estado limite pode ser determinado para funções lineares e não lineares. O estado limite da função descrito na Equação (2.100) pode ser transformado em normal padrão com a Equação (2.97) e ser expresso como:

$$g(U) = g(\{\sigma_{x1}\mu_1 + \mu_{x1}, \sigma_{x2}\mu_2 + \mu_{x2}, \ldots, \sigma_{xn}\mu_n + u_{xn}\}T) = 0 \tag{2.101}$$

$$g(U) = g(\{\sigma_{x1}\mu_1 + \mu_{x1}, \sigma_{x2}\mu_2 + \mu_{x2}, \ldots, \sigma_{xn}\mu_n + u_{xn}\}T) = 0 \tag{2.102}$$

O índice β é o comprimento de MPP até a origem, em que a série de expansão de Taylor de primeira ordem vai de $g(U)$ até o MPP U* e está expressa da seguinte forma:

$$\tilde{g}(U) \approx g(U^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(U^*)}{\partial U_i}(ui - ui^*) \tag{2.103}$$

Para a transformação das variáveis da Equação (2.97), designa a letra *k* para o número de iterações do algoritmo.

$$\frac{\partial \tilde{g}(U)}{\partial u_i} = \frac{\partial g(X)}{\partial x_i}\sigma_{xi} \tag{2.104}$$

O índice de segurança é o menor comprimento da origem até a superfície de falha, onde *O* é o vetor normal da origem à superfície de falha $g(U)$, que intercepta o ponto P*:

$$\hat{O}P^* = \beta = \frac{g(U^*) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(U^*)}{\partial x_i} \sigma_{xi} u_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(U^*)}{\partial x_i} \sigma_{xi} \right)^2}} \tag{2.105}$$

O cosseno diretor do vetor unitário normal, onde $\widehat{\alpha_i}$ é um fator de sensibilidade:

$$cos\, \theta_{xi} = cos\, \theta_{ui} = -\frac{\frac{\partial g(U^*)}{\partial u_i}}{|\nabla g(U^*)|}$$

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{xi}}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{xi} \right)^2 \right]^{1/2}} \tag{2.106}$$

As coordenadas para o ponto P* são calculadas assim:

$$u_i^* = \frac{x_i{}^* - \mu_{xi}}{\sigma_{xi}} = \hat{O}P^* \cos \theta_{xi} = \beta \cos \theta_{xi} \tag{2.107}$$

As coordenadas do ponto P* em seu espaço original são:

$$x_i^* = \mu_{xi} + \beta \sigma_{xi} \cos \theta_{xi}\, ,\ (i = 1,2,..,n) \tag{2.108}$$

Então PP* é um ponto na superfície do estado limite.

$$g(\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}^T) = 0 \tag{2.109}$$

Para saber se β converge, a desigualdade tem que ser satisfeita.

$$\varepsilon = \frac{|\beta_{k+1} - \beta_k|}{\beta_k} < TOL \tag{2.110}$$

Em que k é número de iterações e *TOL* é uma tolerância numérica especificada de 0,001.

As etapas do método (FOSM-HL) são as seguintes:

1. definir a função de estado limite apropriado, da Equação (2.100);
2. determinar o conjunto de médias para o ponto inicial de projeto $x_{i,k} = \mu_{xi}$ com i=1,2, ..., n. Em seguida, calcular os gradientes $\nabla g(X_k)$ da função de estado limite neste ponto, onde os $x_{i,k}$ representam os elementos do vetor X_k e k representa o número de iterações;
3. calcular o β inicial usando o método do valor médio, $\beta = \mu_g/\sigma_g$ e a direção do cosseno;
4. calcular os novos pontos X_k e U_k das Equações (2.107) e (2.108) e os gradientes nestes novos pontos;

5. calcular o índice de segurança β usando a Equação (2.105) e a direção do cosseno com na Equação (2.106);
6. refazer os passos (4) e (6) até que β convirja na Equação (2.110); e
7. calcular as coordenadas dos pontos do projeto X_k ou o mais provável ponto de falha (MPP), X*.

2.5.4 Método Hasofer Lind–Rackwitz Fiessler (HL-RF)

Para este método, as variáveis aleatórias *X* são consideradas normalmente distribuídas. Em casos não gaussianos, mesmo quando a função *g* limite de estado (*X*) é linear para o cálculo da probabilidade, precisa-se fazer uma transformação. Existem diversos métodos disponíveis para a realização de transformações, tal como e Rackwitz. Um simples, transformação de aproximação chamada a distribuição normal equivalente.

Quando as variáveis são independentes entre si, onde $\phi^{-1}[.\ ]$ é a inversa de $\phi[.\ ]$, a transformação é:

$$u_i = \phi^{-1}\,[F_{xi}(x_i)] \tag{2.111}$$

Para obter uma distribuição normal equivalente, utiliza-se na série de expansão de Taylor para a transformação de MPP até *X*,* não levando em consideração os termos não lineares.

$$u_i = \phi^{-1}[F_{xi}(x_i{}^*)] + \frac{\partial}{\partial x_i}([\phi^{-1}F_{xi}(x_i)])|_{xi^*}(x_i - x_i^*) \tag{2.112}$$

Onde:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi^{-1}[F_{xi}(x_i)] = \frac{f_{xi}(x_i)}{\phi(\phi^{-1}[F_{xi}(x_i)])} \tag{2.113}$$

Substituindo o termo $\frac{\partial}{\partial x_i}\phi^{-1}[F_{xi}(x_i)]$ da Equação (2.113) na (2.112), tem-se:

$$u_i = \frac{x_i - [x_i^* - \phi^{-1}[F_{xi}(x_i{}^*)]\phi(\phi^{-1}[F_{xi}(x_i{}^*)])/f_{xi}(x_i{}^*)]}{\phi(\phi^{-1}[F_{xi}(x_i{}^*)])/f_{xi}(x_i{}^*)} \tag{2.114}$$

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{x'i}}{\sigma_{x'i}} \tag{2.115}$$

Onde $\mu_{x'i}$ e $\sigma_{x'i}$ são, respectivamente, a média e o desvio padrão equivalentes ou aproximados da distribuição normal e $F_{xi}(x_i)$ é a FDC e $f_{xi}(x_i)$ é a FDP.

$$\sigma_{x'i} = \frac{\phi(\phi^{-1}[F_{xi}(x_i{}^*)])}{f_{xi}(x_i{}^*)} \tag{2.116}$$

$$\mu_{x'i} = x_i^* - \phi^{-1}[F_{xi}(x_i^*)]\sigma_{x'i} \quad (2.117)$$

Para obter distribuições normais equivalentes, trabalha-se com a FDC e com FDP da função original não gaussiana com variáveis aleatórias. Posteriormente, transformam-se as variáveis por meio de aproximação em variáveis aleatórias equivalentes normais ao MPP. Com x'_i sendo uma variável aleatória, com distribuição equivalente, normalmente distribuída.

$$F_{xi}(x_i^*) = F_{xi'}(x_i^*) \quad (2.118)$$

$$F_{xi}(x_i^*) = \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i'}}{\sigma_{x_i'}}\right) \quad (2.119)$$

$$\mu_{x'i} = x_i^* - \phi^{-1}\left[F_{x_i}(x_i^*)\right]\sigma_{x_i'} \quad (2.120)$$

<u>Os passos do método Hasofer Lind – Rackwitz Fiessler (HL-RF)</u>

A presente pesquisa propõe a implementação da metodologia de Hasofer e Lind (1974) melhorando-as com o método de Rackwitz e Fiessler (1978) para realizar o tratamento de variáveis não normais. O algoritmo foi implementado com o processo iterativo de Newton-Raphson. O organograma Figura 2.22 demostra a organização do processo implementado.

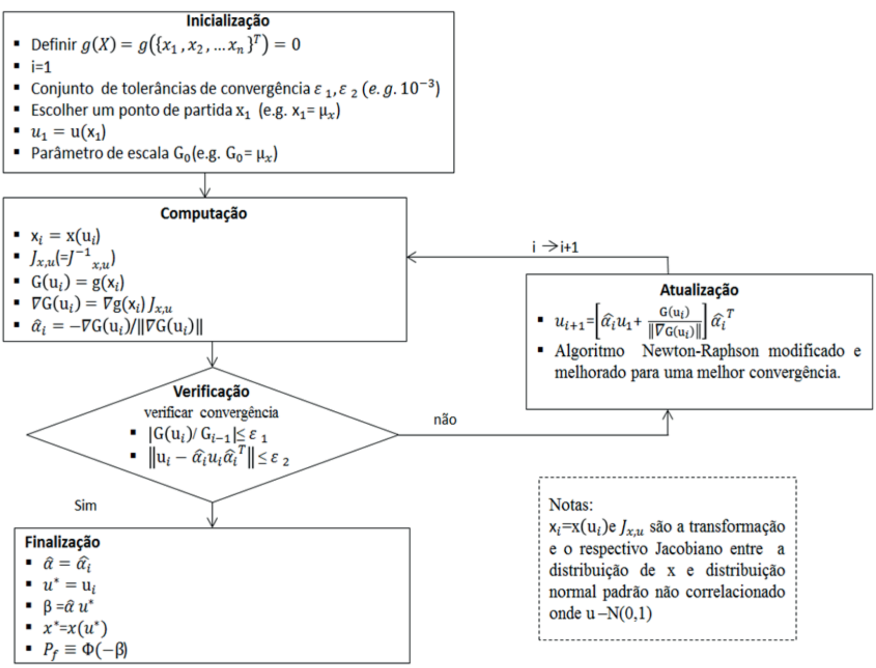


Figura 2.22. Procedimentos para o cálculo do índice de confiabilidade β para funções de estado limite lineares e não lineares

2.6 MÉTODO DE MONTE CARLO (MMC)

Segundo Haldar e Machadavam (2000), o método de simulação de Monte Carlo é composto pelos seguintes passos:

- fazer a formulação do problema e definir as variáveis aleatórias;
- quantificação das características probabilísticas das variáveis aleatórias;
- geração dos números aleatórios; e
- experimentação numérica.

A formulação do problema identifica o evento a ser estudado e as variáveis que estão relacionadas.

Em seguida, para fazer a quantificação das características probabilísticas das variáveis aleatórias, define-se inicialmente o possível comportamento que apresenta uma população e que está definido pela função de densidade ou distribuição da probabilidade FDP.

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x).dx \qquad (2.121)$$

Em que *F* é a função de distribuição acumulada de *X*:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \qquad (2.122)$$

Para variáveis que apresentam um comportamento normal Gaussiano:

$$FDP = \Phi_{\mu,\sigma^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\mu-\sigma)^2}{\sigma^2}} du \qquad (2.123)$$

A função de distribuição normal padrão é expressa:

$$FDP = \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\mu^2}{2}} du \qquad (2.124)$$

É possível relacionar todas as variáveis aleatórias normais com a distribuição normal padrão, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (2.125)$$

Este processo denomina-se padronização $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Z \sim N(0,1)$. Se Z é uma distribuição normal padrão com μ e σ sua inversa, então é expressa por:

$$X = \sigma Z + \mu \qquad (2.126)$$

A simulação de MMC à FDC também possui um papel importante do processo, pois é utilizada nos cálculos para a geração de números aleatórios.

O processo de geração de números aleatórios, inicialmente, identifica as características probabilísticas das variáveis aleatórias, como as médias, os desvios padrão e o tipo de distribuição. MMC baseia-se em gerar números aleatórios de acordo como a distribuição especificada. A geração de números aleatórios é realizada para números aleatórios distribuídos uniformemente entre 0 e 1. Em seguida à geração dos números aleatórios uniformes u_{xi}, esses valores são transformados em uma distribuição normal padrão, ou em qualquer outro tipo de distribuição seguido o mapeamento descrito na Figura 2.23 que é baseado no teorema da integral equivalente entre as FDC. O MMC se utiliza deste terorema para a geração dos números aleatórias necessária à simulação.

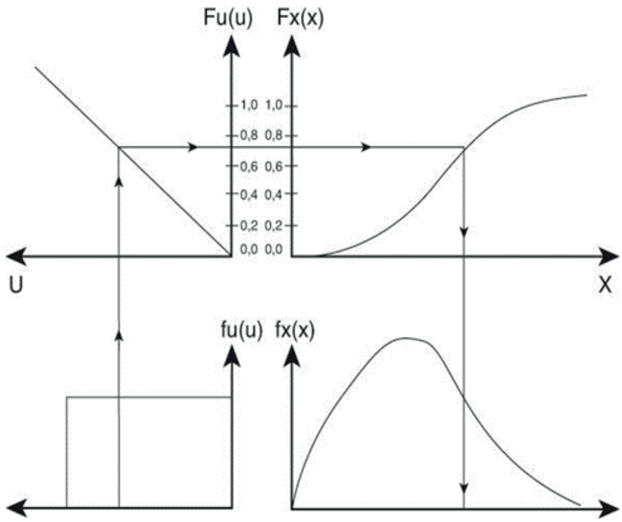


Figura 2.23. Mapeamento para simulação de números aleatórios (modificado de Haldar et al., 2000)

A variável aleatória de FDC é igualada ao número aleatória gerado em *ui*. $F_{xi}(X_i) = u_{xi}$, com a seguinte equação:

$$X_i = F_{X^{-1}}(u_i) \qquad (2.127)$$

A experimentação numérica é realizada para *N* simulações, até não obter muita diferença entre as respostas do sistemas para cada *N* simulação.

2.7 TRABALHOS DE CONFIABILIDADE E MECÂNICA DA FRATURA

Alguns trabalhos no Brasil relacionados com a pesquisa são os artigos (Diniz et al., 2011; Diniz et al., 2013) onde estudam-se os benefícios de durabilidade em relação ao corrosão do aço e a falha dúctil para o concreto armado e a falha frágil para o concreto armado com polímeros de fibras de carbono. Diniz et al., 2013 considera as incertezas das variáveis do projeto de vigas estimadas com a norma ACI-440 (2006), e faze uma avaliação de probabilidade de falha com respeito à resistência à flexão última por meio do método de Monte Carlo. Os procedimentos apresentados no artigo podem ser usados para o tratamento e recomendações de vigas de concreto armado com polímeros de fibras de carbono. Diniz et al., 2011 estabelece comparações entre as vigas intactas e as vigas recuperadas, onde os deslocamentos das vigas são avaliados com um modelo não linear para o concreto armado utilizando o método dos elementos finitos e simulações de Monte Carlo para conhecer a estatística do processo de carga ruptura.

O artigo de Beck et al., 2008 estuda tubos de concreto armado com abertura de fissuras, projetado pela norma NBR 6168:2003. Nesse trabalho, faz-se uma avaliação das formulações respeitavas para o projeto de elementos de concreto armado por meio da confiabilidade utilizando o método FOSM e com simulações de Monte Carlo. Os resultados revela a influência das variáveis de projeto que tem maior influência na probabilidade de falha, relacionadas com o problema e com os índices de confiabilidade.

Outro artigo do mesmo autor Beck et al., 2004 desenvolve uma pesquisa para o problema de falha por sobrecarga de um elemento estrutural, submetido a um carregamento aleatório para o qual analisa-se a propagação de trincas. O problema é formulado com a mistura de modelos de falha e modelos de propagação de trincas. A solução do problema aborda a sobrecarga e os modelos críticos de falha por meio do cálculo de crescimento da trinca evitando controles destrutivos. Além de isso o estudo de a sensibilidade de participação das variáveis K fator de intensidade de tensão, a_c comprimento crítico de trinca, σ_r entre outras, ajuda a determinar o método de solução apropriado para problemas específicos.

METODOLOGIA

Neste capitulo, é descrita a metodologia utilizada para a avaliação de confiabilidade realizada para a flexão de vigas em três pontos (FTP) e elaboradas com concreto convencional (CONC) e com concreto reciclado (FRAP).

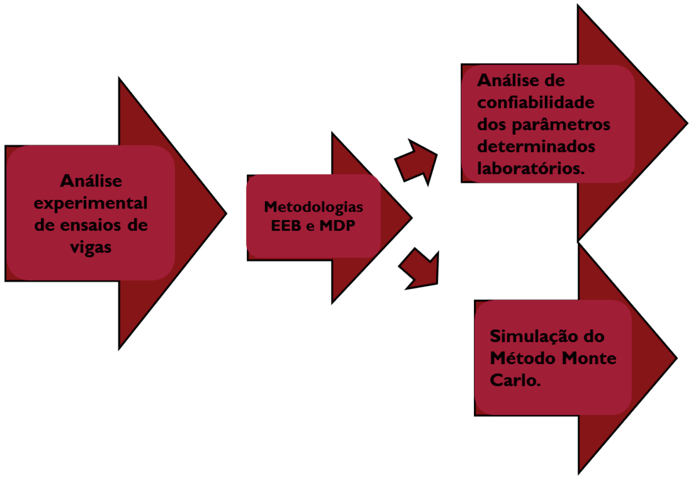


Figura 3.1. Metodologia geral

3.1 PROGRAMA EXPERIMENTAL

Ensaios seguindo as normas RILEM (1990a, b) para vigas submetidas a FTP de diversos tamanhos foram testadas para o cálculo das propriedades de fratura (G_f, C, $CTOD_C$) e módulo de elasticidade (E). Os ensaios foram realizados no Laboratório de Materiais Cimentícios da Universidade de Illinois em Urbana Champaign (UIUC), nos Estados Unidos, para o CONC. A Tabela 3.1 mostra as dimensões e os dados medidos das vigas ensaiadas para os ensaios de EEB, MFLE e MDP para CONC.

É importante observar que as mesmas vigas foram usadas em cada metodologia de ensaio. Assim, o EEB, o MFLE e o MDP determinaram três parâmetros estatísticos de média aritmética (μ), desvio padrão (σ) e coeficiente de variação (CV) das propriedades dos materiais (G_f, C, $CTOD_C$). Os resultados do cálculo desses parâmetros são apresentados na seção 2.3, em que P_j, como se ilustrou na seção 2.3.1, faz referência ao carregamento máximo medido no ensaio.

Ademais, é importante notar que P_j é um parâmetro do ensaio EEB, também usado para o ensaio de MFLE e que C_i e C_u são parâmetros dados do ensaio de MDP. As variáveis de L, D e t estão relacionadas com a geometria da viga, S é o vão e W é o peso da viga.

Tabela 3.1. Dimensões e dados medidos das vigas para os ensaios de EEB, MFLE e MDP para CONC.

Viga	W (N)	L (mm)	S (mm)	D (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	P_j (kN)	C_i (mm/N)	C_u (mm/N)
Ia	530,7	1105,0	1000,0	255,0	80,0	88,0	6,7	5,3E-06	8,8E-06
Ib	527,3	1105,0	1006,0	260,0	79,0	95,0	6,9	6,0E-06	8,8E-06
Ic	529,2	1104,0	1004,0	258,0	79,0	88,5	6,2	5,3E-06	8,1E-06
IIa	192,3	700,0	601,0	152,0	79,0	58,0	4,3	7,2E-06	1,4E-05
IIb	193,7	700,0	602,0	153,0	79,0	53,0	5,1	6,5E-06	1,2E-05
IIc	189,8	700,0	601,0	154,0	79,0	55,0	4,7	6,6E-06	1,1E-05
IIIa	40,6	349,0	252,0	63,0	80,0	22,5	2,5	6,4E-06	1,1E-05
IIIb	41,0	347,5	249,0	63,5	80,0	22,0	2,6	7,0E-06	1,1E-05
IIIc	41,8	350,0	249,0	64,0	79,5	24,0	2,2	-	-
IIId	41,9	347,5	248,0	65,5	79,5	24,5	2,4	8,0E-06	1,2E-05

O concreto reciclado tem uma utilização muito frequente devido os benefícios ambientais e econômicos e é composto por materiais reciclados proveniente de subprodutos de concreto. Alguns materiais utilizam o concreto reciclado em sua composição, tais como o cimento pozolânico e escoria de alto forno de terra granulada. Aditivos minerais, como cinzas volantes, também conhecidas como agregados reciclados, fracionados ou recuperados de pavimento asfáltico são utilizados como agregado para confecção de concreto reciclado (RCA). Entre os principais utilizados estão o RAP do inglês *recycled concrete aggregate* e o FRAP do inglês *fractionated reclaimed asphalt pavement*.

O concreto com adição de agregado reciclado denominado FRAP é elaborado da mistura de cimento com agregado obtido de pavimento asfáltico fraturado e reciclado, e tem propriedades de capacidade de carga de flexão de losas de concreto especificamente muito parecidas com a do concreto convencional CONC como observa-se nos resultados da pesquisa realizada por Brant *et.al.,* 2013. Devido a isto e aos custos de produção menores comparados ao concreto convencional, a aplicação de FRAP e RAP em pavimentos de concreto de rodovias e aeroportos tem se difundido bastante. A Figura 3.2 apresenta as superfícies de um corpo de prova de FRAP.

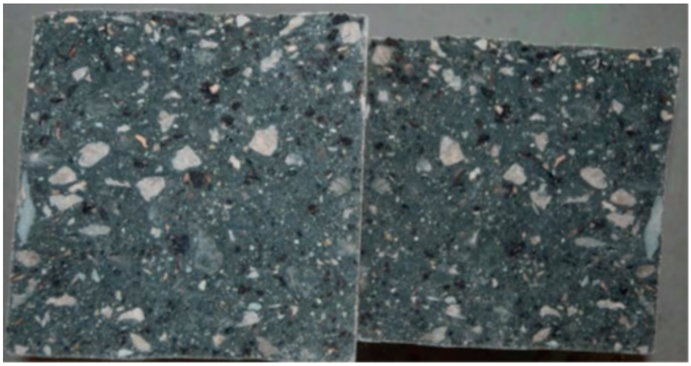


Figura 3.2. Concreto Reciclado (FRAP). Brand *et al* (2013)

Os mesmos ensaios realizados para o CONC, descritos anteriormente, foram realizados para vigas submetidas a FTP de diversos tamanhos com o FRAP baseados em ensaios que foram realizados no Laboratório de Materiais Cimentícios da Universidade de Illinois em Urbana Champaign (UIUC), nos Estados Unidos. A Tabela 3.2 mostra as dimensões e os dados medidos das vigas ensaiadas para FRAP.

Tabela 3.2. Dimensões e dados medidos das vigas para os ensaios de EEB, MFLE e MDP para FRAP.

Viga	W (N)	L (mm)	S (mm)	D (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	P_j (kN)	C_i (mm/N)	C_u (mm/N)
Ia	523,9	1107,0	1000,0	259,0	80,5	88,5	6,8	6,8E-06	1,3E-05
Ib	540,5	1115,0	1000,0	257,0	79,0	86,0	5,8	7,3E-06	1,2E-05
Ic	529,2	1109,0	1001,0	260,0	79,0	90,0	5,7	6,9E-06	1,2E-05
IIb	187,4	700,0	600,0	152,0	79,0	53,0	3,6	8,6E-06	1,3E-05
IIc	187,9	699,0	601,0	151,0	80,0	50,0	3,7	6,8E-06	1,1E-05
IIIa	40,0	348,0	249,0	63,0	80,0	21,0	1,9	7,8E-06	1,3E-05
IIIb	41,4	349,0	252,0	65,0	80,0	19,0	2,2	8,4E-06	1,6E-05
IIIc	39,8	347,0	250,0	64,0	80,0	19,0	2,4	6,8E-06	1,5E-05

3.2 VARIÁVEIS DE ANÁLISE E FUNÇÕES DE DESEMPENHO

A análise risco é realizada nessa pesquisa com a predição do índice de confiabilidade para a falha estrutural de uma viga FTP, como ilustrada na Figura 3.3, e é submetida ao carregamento no meio do vão (P_s).

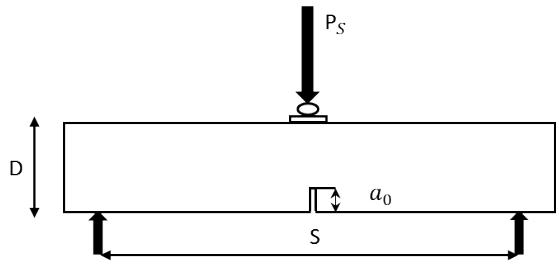


Figura 3.3. Viga submetida a flexão em três pontos.

A função de desempenho desta configuração é dada por:

$$G_1(P_s, a_0, E, G_f, C) = \frac{tD}{C_n}\left(\frac{G_f E}{Dg(\alpha_0) + Cg'(\alpha_0)}\right)^{\frac{1}{2}} - P_s = P_r^{EEB} - P_s \quad (3.1)$$

Em que, para a viga FTP, $g(\alpha_0)$ está definido pelas Equações (2.10) e (2.20), C_n pela Equação (2.24) e P_r^{EEB} é termo o proveniente da predição de resistência do modelo de EEB, definido na Equação (2.25) para EEB e que é a mesma função de desempenho para o MDP e, ainda, em que, daqui em diante, será referido como P_r^{EEB}.

$$G_2(P_s, a_0, E, G_f, C) = \frac{tD}{C_n}\left(\frac{G_f E}{Dg(\alpha_0)}\right)^{\frac{1}{2}} - P_s = P_r^{MFLE} - P_s \quad (3.2)$$

Para a segunda função de desempenho, o primeiro termo do lado direito da equação (P_r^{MFLE}) é proveniente da predição de resistência do ensaio de MFLE definido na Equação (2.26) para MFLE e que será referido como P_r^{MFLE}

O segundo termo das Equações (3.1) e (3.2) é o termo de solicitação (P_s) que será uma variável aleatória com média aritmética para cada α_0 e D, adotados como:

$$\mu_{P_s|\alpha_0,D} = \frac{1}{F_s}\mu_{P_r^{EEB}}|_{\mu_{\alpha_0},\mu_D} \quad (3.3)$$

Em que F_s é um fator considerado aqui de F_s =1,1; 1,5 e 2,0 e para CONC e de F_s = 1,1 para FRAP.

Com G_1( ) e G_2( ) definidas pelas Equações (3.1) e (3.2), as propriedades estatísticas para o carregamento aplicado e os parâmetros geométricos são descritos na Tabela 3.3 e na Tabela 3.4, respectivamente. Com os dados dos ensaios de laboratório e a teoria descrita nas seções 2.3.1. e 2.3.2, pode-se calcular as propriedade de fratura do material das vigas seguindo cada metodologia de teste (EEB, MFLE e MDP). As tabelas mostram os parâmetros estatísticos de média aritmética (μ), coeficiente de variação (CV) e tipo de distribuição analisados.

As análises de confiabilidade estudam dois casos de tipos de distribuição (normal e lognormal) para as variáveis aleatórias consideradas, como indicado da Tabela 3.3 á Tabela 3.6, para o Caso I e Caso II para CONC e o Caso II para FRAP. Estas distribuições

são inicialmente consideradas por serem as mais utilizadas na engenharia, especialmente quando há falta de testes extensivos com muitas amostras para determinar a respectiva distribuição.

Tabela 3.3. Parâmetros de carregamento para as simulações de confiabilidade

Variável	*μ*	*CV*	*Caso I*	*Caso II*
P_s (N)	Variável de acordo Com Equação (3.3)	0,10	Normal	Lognormal

Tabela 3.4. Parâmetros geométricos para as simulações de confiabilidade

Variável	*μ*	*CV*	*Caso I*	*Caso II*
S (m)	{0,25; 0,60; 1,00; 4,00}	-	Determinístico	Determinístico
t (m)	0,08	-	Determinístico	Determinístico
D (m)	{0,063; 0,15; 0,25; 1,00}	-	Determinístico	Determinístico
a_0 (m)	Variável de modo que a_0 = {0,10; 0,25; 0,40}	0,10	Normal	Lognormal

De acordo com os ensaios de laboratório considerando os dois procedimentos estudados EEB e o MDP, a Tabela 3.5 e 3.6 apresentam, respectivamente, as características estatísticas das propriedades elásticas (*E*) e de fratura (G_f e *C*) dos materiais determinados com cada ensaio.

Tabela 3.5. Parâmetros do material, determinados pelo EEB, para as simulações de confiabilidade

Material	*CONC*		*FRAP*		*Caso I*	*Caso II*
Variável	*μ*	*CV*	*μ*	*CV*		
G_f (N/m)	70,29	0,17	73,85	0,33	Normal	Lognormal
C (mm)	37,10	0,01	50,32	0,016	Normal	Lognormal
E (N/m^2)	34,82E+09	0,07	25,83+09	0,11	Normal	Lognormal

Tabela 3.6. Parâmetros do material, determinados pelo MDP, para as simulações de confiabilidade.

Material	*CONC*		*FRAP*		*Caso I*	*Caso II*
Variável	*μ*	*CV*	*μ*	*CV*		
G_f (N/m)	61,74	0,16	56,55	0,33	Normal	Lognormal
C (mm)	28,92	0,19	31,76	0,38	Normal	Lognormal
E (N/m^2)	34,82E+09	0,07	27,04E+09	0,06	Normal	Lognormal

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM VIGAS FTP

Neste capitulo apresentam-se os resultados das análises de confiabilidade realizados na seção 4.1. para o concreto convencional CONC e na seção 4.2. para o concreto reciclado FRAP.

4.1 CONCRETO CONVENCIONAL (CONC)

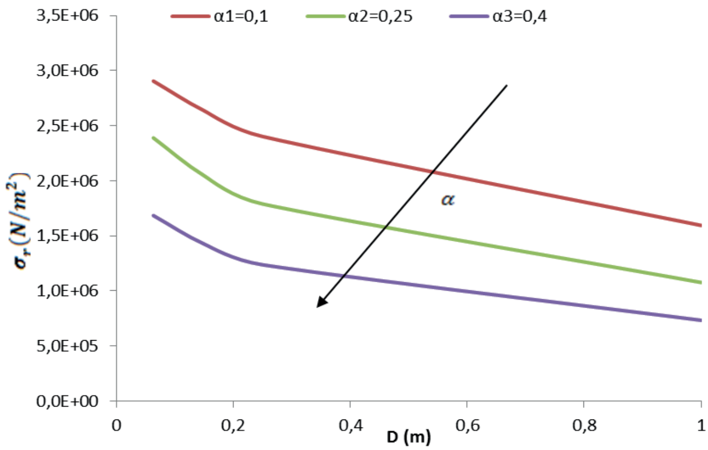
Os resultados de confiabilidade e a predição determinística de resistência para diferentes tamanhos de viga FTP e de trinca, variando os α para material CONC avaliado com o algoritmo (HL-RF).

4.1.1 Predição determinística do efeito de escala da resistência em vigas FTP

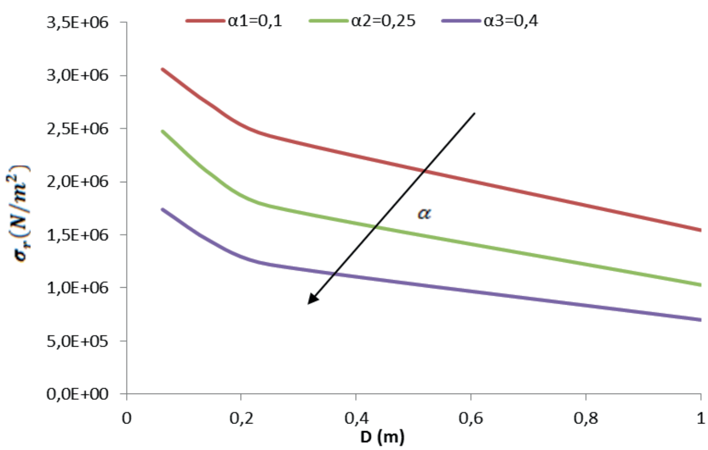
Uma análise determinística considera a predição da resistência nominal (σ_r) com relação à geometria da viga para os três modelos estudados: EEB, MFLE e MDP. A Figura 4.1 apresenta a dependência de σ_r com o tamanho das vigas (D) e o tamanho relativo das trincas ($\alpha_0 = \alpha_0/D$) para o fator de segurança $F_s = 1{,}1$. Os gráficos foram gerados de acordo com a análise determinística usual, em que são utilizadas as médias (μ) dos parâmetros das Tabela 3.1, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 para CONC.

Como esperado, o efeito de escala no concreto é descrito pelo EEB por meio da diminuição da resistência nominal com o aumento do tamanho da viga, como ilustram as tendências das curvas da Figura 4.1 para os itens (a) e (b). Como esses dois modelos utilizam a mesma equação de predição para σ_r, as curvas de predição são bem similares e as pequenas diferenças podem ser atribuídas às diferenças dos parâmetros G_f e C que são maiores quando calculados segundo a metodologia EEB como encontra-se especificado na Tabela 3.5. e na Tabela 3.6. É importante observar que, para α→ 0 na menor viga (D =0,063m), os modelos EEB e MDP apresentam falhas de predição devido ao fato de que o tamanho equivalente da zona de processo ser a propriedade C, que nestes casos, tem o valor de C (28 mm/37 mm), e aproxima-se significativamente da espessura da viga (63 mm). Este fato torna limitadas as análises nestes casos devido as hipóteses básicas dos modelos EEB e MDP (Bazant; Planas, 1997; Shah *et al*., 1994).

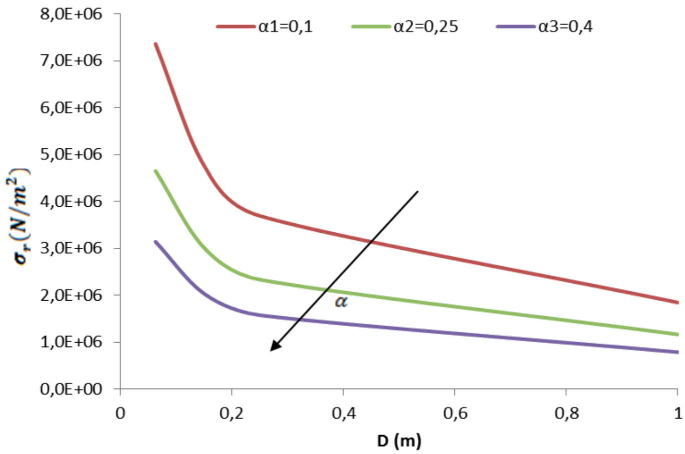
As predições da MFLE, na Figura 4.1 para o item c), são bem conservadoras quando comparadas às preditas pelo EEB e MDP. Isto ocorre especialmente para pequenos valores de α, onde σ_r cresce assintoticamente na Equação (2.8), que também pode ser definida em termos da Equação (2.26).


α1=0,1
α2=0,25
α3=0,4
3,5E+06
3,0E+06
2,5E+06
2,0E+06
1,5E+06
1,0E+06
5,0E+05
0,0E+00
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
D (m)
$\sigma_r (N/m^2)$
α

(a) EEB


α1=0,1
α2=0,25
α3=0,4
3,5E+06
3,0E+06
2,5E+06
2,0E+06
1,5E+06
1,0E+06
5,0E+05
0,0E+00
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
D (m)
$\sigma_r (N/m^2)$
α

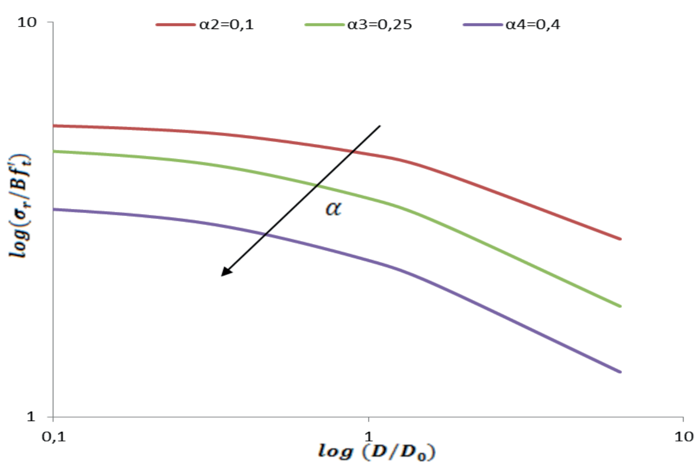
(b) MDP



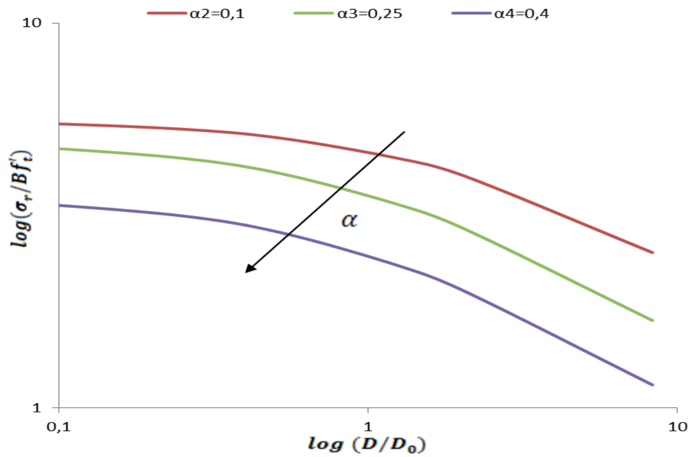
(c) MFLE

Figura 4.1. Predição deterministica da resistência σ_r e efeito de escala para a viga de FTP (CONC): (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE.

A Figura 4.2 é referente ao gráfico clássico do efeito de escala que descreve a curva da resistência nominal com o aumento de tamanho em escala logarítmica como ilustrados na Seção 2.3.1. Utilizando a Equação (2.11) e (2.13) pode-se observar que as curvas são as esperadas, conforme ilustrado na Figura 2.5.



(a) EEB



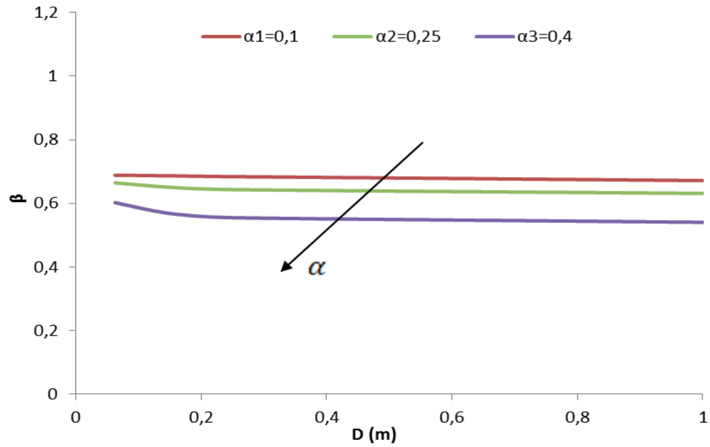
(b) MDP

Figura 4.2. Predição deterministica da resistência σ_r e efeito de escala para a viga de FTP em escala logaritmica para (CONC): (a) EEB; (b) MDP.

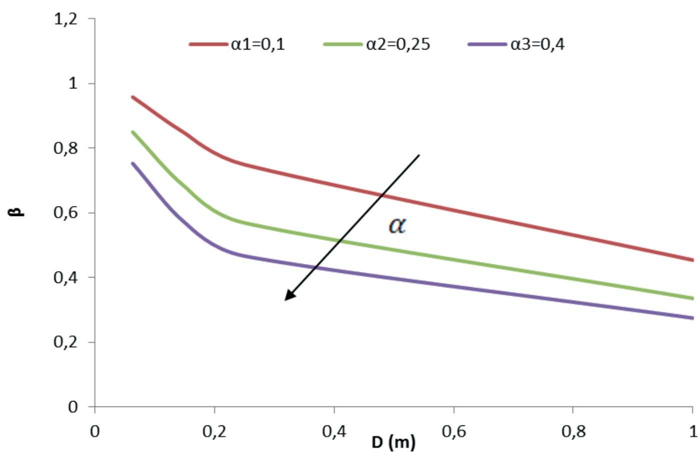
4.1.2 Predição do índice de confiabilidade β e efeito de escala da resistência em vigas FTP

Para a análise de confiabilidade, os índices β foram determinados com o algoritmo descrito na Figura 2.22 para o problema definido na Equação (3.1) e (3.2), com as condições das Equação (3.3). A Figura 4.3 apresenta os resultados de β para diferentes geometrias de viga e tamanhos relativos de trincas (α= a_0/D) para F_s = 1,1. Como indicado nessa figura, as análises foram realizadas para as propriedades extraídas dos diferentes modelos EEB, MDP e MFLE para o caso I, que definem as variáveis aleatórias seguindo uma distribuição normal (ver Tabela 3.1, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6).

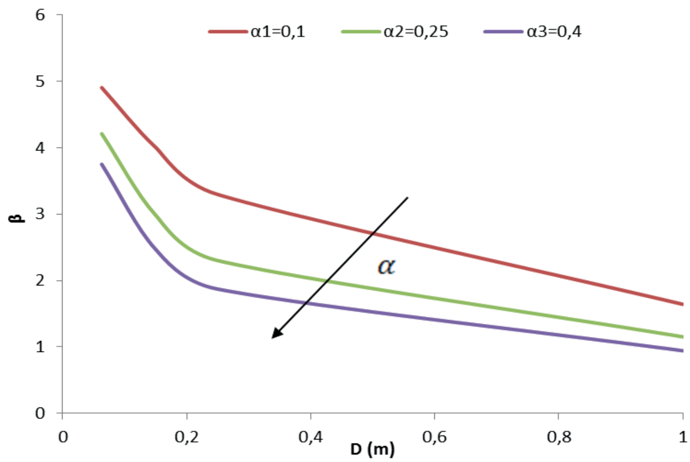
É importante notar que a função de desempenho $G = P_r - P_s$ faz relação entre os modelos de EEB, MFLE e MDP, trabalhando P_r para cada modelo em particular (EEB, MFLE e MDP e, no casso de P_s, trabalha-se com o modelo de EEB. Fazer estes tipos de comparações incrementado o valor de estado limite da função e os valores do índice de confiabilidade, mas, em contrapartida, é mais difícil a linearização e convergência, especialmente para valores pequenos D = 0,063 m e de α → 0,0 como fosse mencionado anteriormente. Portanto, compara-se EEB com todos os modelos, com exceção de MFLE para α→ 0,0. Esse é comparado com o próprio para conseguir a convergência.


α1=0,1
α2=0,25
α3=0,4
β
α
D (m)
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2

(a) EEB


α1=0,1
α2=0,25
α3=0,4
β
α
D (m)
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2

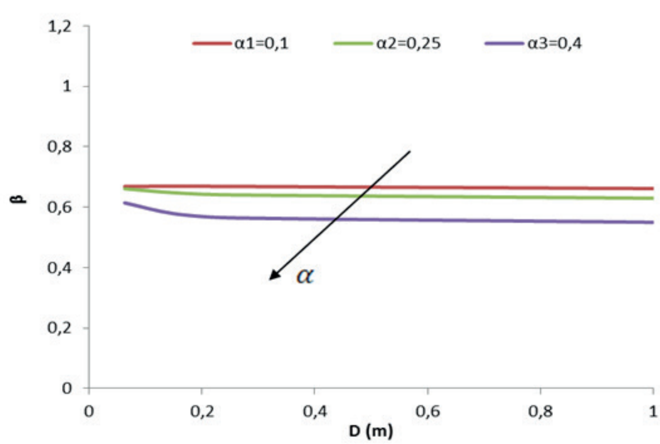
(b) MDP



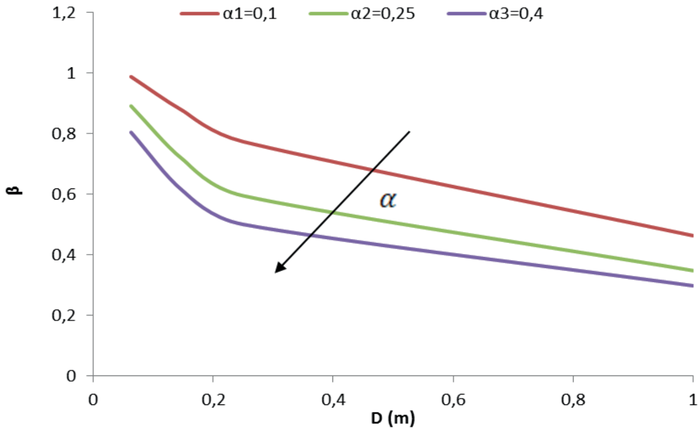
(c) MFLE

Figura 4.3 Predição do índice de confiabilidade β para material CONC, com F_S = 1,1 e caso I: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE

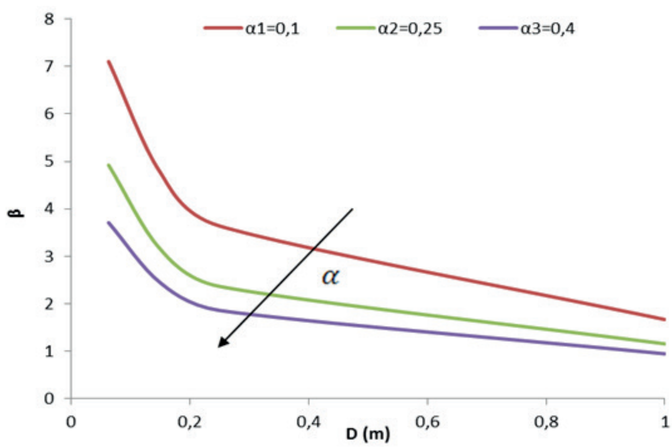
Similarmente, a Figura 4.4 apresenta as predições de confiabilidade para o caso II em que as variáveis aleatórias envolvidas são assumidas lognormais, com F_s = 1,1. As mesmas tendências observadas para o caso I podem ser aplicadas quando as variáveis são lognormais. Somente as predições da MFLE mostraram um ligeiro aumento dos valores de β. A consideração da lognormalidade das distribuições de variáveis aleatórias é muito importante uma vez que variáveis aleatórias lognormais não assumem valores negativos. Isto se torna muito conveniente na consideração de variáveis de geometria e resistência comumente encontrados em problemas de engenharia.



(a) EEB



(b) MDP



(c) MFLE

Figura 4.4. Predição do índice de confiabilidade β para material CONC, com $F_S = 1{,}1$ e caso II: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE.

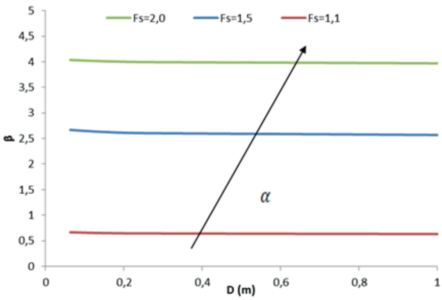
Os índices β forem muito maiores para MFLE em comparação com os modelos de MFNLE de EEB e MDP, devido a que MFLE não considera a incidência do parâmetro de comprimento de trinca equivalente e além disso não consegue convergir para pequenos valores de D e de α. É importante observar os altos valores para os índices de confiabilidade preditos pela MFLE, onde, segundo este modelo, a viga teria uma falsa probabilidade de falha bem pequena o que é são predições não realistas. Isto alerta o fato da limitação dos usos dos princípios da mecânica da fratura linear para materiais quasi-frágeis como o concreto, onde a existencia de uma zona de processo, aqui representada por C, altera significante as predições de falha dos materiais.

Comparando os índices calculados para o EEB, MDP e MFLE, nota-se que devido ao efeito de escala do problema, os índices β decrescem com o aumento da espessura da viga *D*. Isto evidencia o efeito de escala também nos índices de confiabilidade, onde vigas mais espessas tem menor confiabilidade e, consequentemente, maior será a probabilidade de falha comparando-se com vigas de menor altura. Note que o EEB apresenta o menor efeito de escala para β, como ilustram as curvas quase constantes em *D*, especialmente para os menores α. Isto pode ser explicado pelo pequeno valor do CV=0,016 de *C* (Tabela 3.5) determinado pelos ensaios de EEB, que é significantemente menor que a variação de *C* obtida pelos ensaios de MDP. A análise da influência de *C* será comprovada logo em seguida.

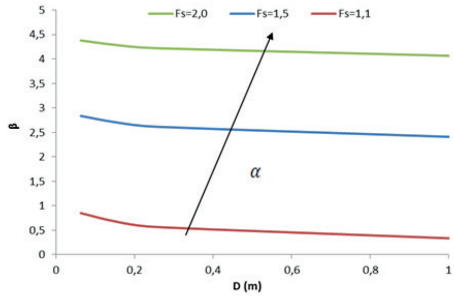
Conforme esperado, os valores crescentes do tamanho da trinca relativo à altura, dados pela variável α, diminuem a confiabilidade, aumentando, assim, a probabilidade de falha. Seguindo a mesma tendência dos gráficos de predição de resistência, percebe-se que os valores de β determinados pela MFLE são maiores (predições não conservadoras do risco de falha) devido à predição não conservadora de σ_r dado por esse modelo. Isto evidencia as limitações da MFLE na predição quantitativa de falha em estruturas de concreto.

Comparando os modelos EEB e MDP, nota-se que o MDP apresenta predições de confiabilidade maiores (mais conservadoras) para todos os tamanhos de viga *D* e tamanhos relativos de trinca α. Por exemplo, a curva α =0,1 apresenta 0,75 < β < 0,30 na variação em *D*. Por outro lado, o EEB apresenta variação 0,60 < β < 0,55 para o mesmo α.

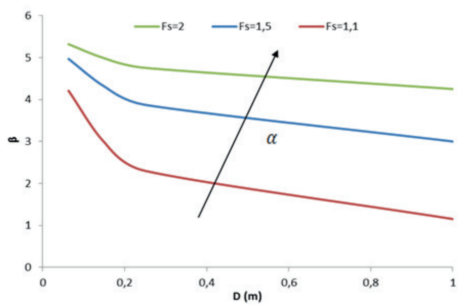
Para os fatores de segurança F_S = 1,5 e F_S = 2,0, apresentados no Anexo A e B. Um resumo dos índices os índices β para os diferentes F_S são apresentados na Figura 4.3 para um α =0,25 para o material CONC para distribuição normal (caso I). Note que as curvas têm um comportamento similar ao apresentado para F_S = 1,1, mas com índices de confiabilidade maiores e com curvas tendendo a linearidade.



(a) EEB



(b) MDP



(c) MFLE

Figura 4.5. Índices de confiabilidade CONC para Caso I com α=0,25 e FS = 1,1 ;1,5 e 2,0 para: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE

A Figura 4.6, Figura 4.7 e Figura 4.8 apresentam os gráficos em 3D para o material CONC e caso II, analisando o comportamento de os indices β em função de α e D, e estabelecendo comparações entre os modelos EEB com o MDP para os fatores F_s =1,1; 1,5 e 2,0.

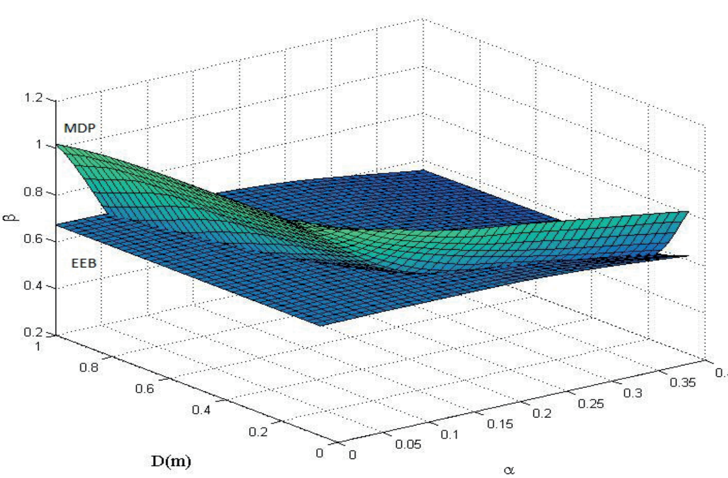


Figura 4.6. Índices de confiabilidade β com F_S = 1,1 para os modelos EEB e MDP, material CONC (caso II)

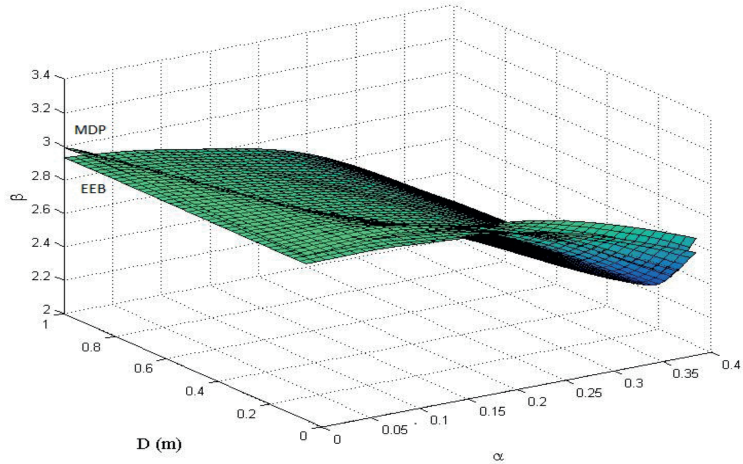


Figura 4.7. Índices de confiabilidade β com F_s = 1,5 para os modelos EEB e MDP, material CONC (Caso II)

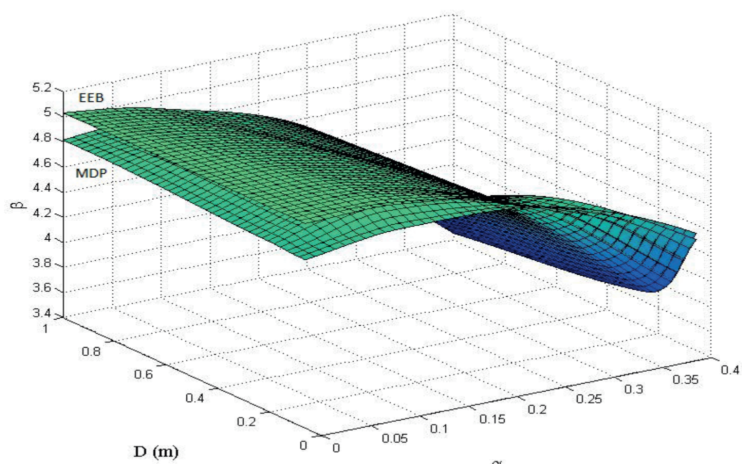


Figura 4.8. Índices de confiabilidade β com F_s = 2,0 para os modelos EEB e MDP, material CONC (Caso II).

As superficies de β para os modelos de EEB e MDP e os fatores de F_s =1,1; 1,5 e 2,0 ilustram a incidência do efeito de escala, onde os valores de β aumentam com o incremento da altura de viga D, e diminuem, significantemente, com o aumento de α. Além disso, as superficies geradas dos indices β para EEB são inicialmente menores que as do MDP com F_s =1,1, e com o aumento de F_s para 1,5 e 2,0 as superficies para o modelo EEB apresentam maiores *í*ndices de confiabilidade que MDP.

4.1.3 Verificação do algoritmo implementado por (FORM HL-RF) com o Método de Monte Carlo (MMC).

O algoritmo de confiabilidade (HL-RF) foi comprovado, por meio de simulações do Método de Monte Carlo (MMC), para os resultados do material CONC com o fator F_s =2,0 seguindo as mesmas equações de desempenho de estado limite com G_1 ( ) e G_2 ( ) para os modelos EEB, MDP. A escolha do fator 2,0 é devido a este gerar maiores valores de probabilidade de falha, sendo o caso mais crítico para as predições do algoritmo FORM HL-RF.

Foram usados os mesmos parâmetros estatísticos e determinísticos do material estabelecidos no capitulo 3 para o caso I e utilizando $N_{MMC}=5E+7$ simulações do MMC. Utilizando as equações de desempenho em conjunto com o MMC, temos como probabilidade de falha:

$$P_f = \frac{N^o \, \mathrm{G}(\quad) < 0}{N_{MMC}} \tag{4.1}$$

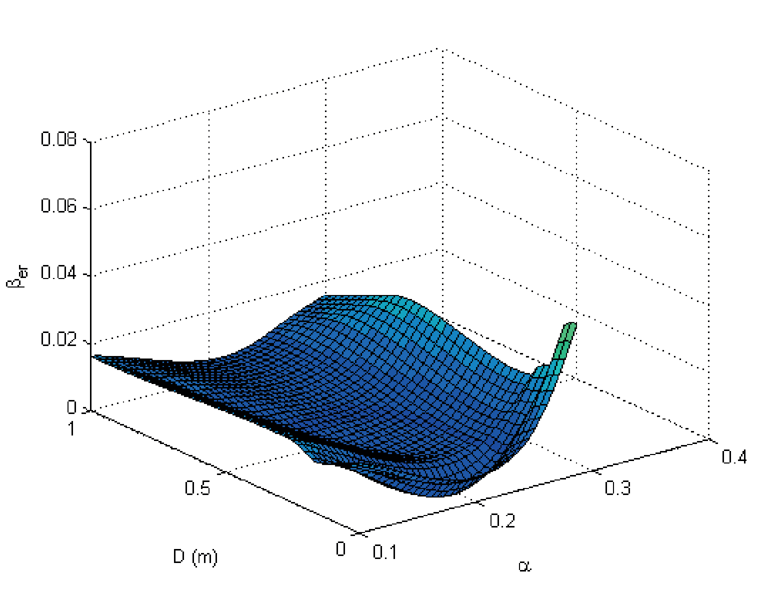
Em que P_f é a probabilidade de falha obtida de número de vezes que função de estado limite seja menor que 0, pela divisão do N_{MMC} que é o número de simulações de MMC. Então conhecendo P_f é possível deduzir o índice $\beta_{MMC,}$ que é o índice de confiabilidade calculado pelo MMC, da Equação (4.3) com a Equação (4.2):

$$P_f = \Phi[-\beta_{MMC}] \tag{4.2}$$

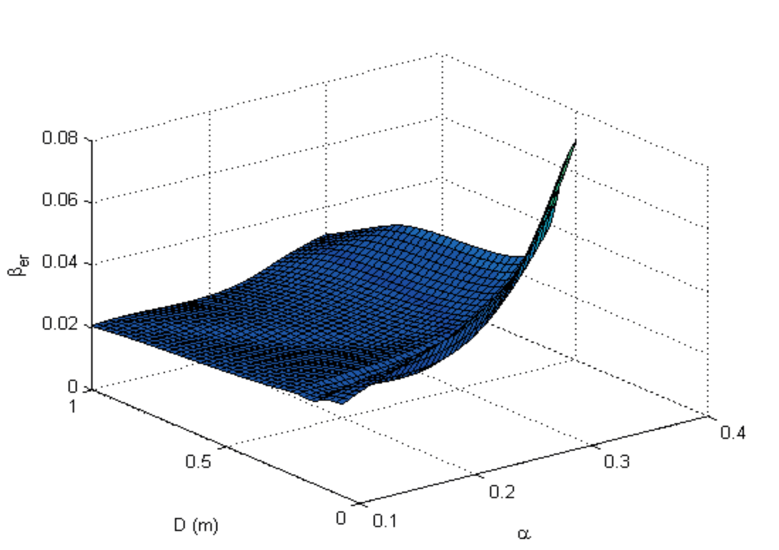
$$\beta_{MMC} = -\,\Phi[Pf] \tag{4.3}$$

Em que ϕ é a FDC da distribuição normal padronizada.

A Figura 4.9 apresenta a diferença relativa $\beta_{er} = \frac{\|\beta_{MMC} - \beta_{FORM}\|}{\beta_{MMC}}$, entre os β_{MMC},calculados pela Equação (4.3) e os β_{FORM} calculado pelo algoritmo implementado e, cujos resultados foram apresentados nas seções anteriores. Note que, para os dois modelos, as diferenças relativas, β_{er} , encontram-se abaixo de 0,04 (4%) em geral. Mostrando a acurácio do algoritmo FORM implementado. Somente para o MDP e com $\alpha \rightarrow 0{,}4$, cujos coeficientes de variação das variáveis de entrada são bem maiores, os valores de β_{er} tendem a aumentar, mas ainda abaixo da diferença relativa de 0,1.



(a) EEB



(b) MDP

Figura 4.9 Erro relativo β_{er} entre os índices de confiabilidade calculados entre o algoritmo FORM e o MMC para F_S = 2,0, material CONC, Caso I e para os modelos a) EEB e b) MDP.

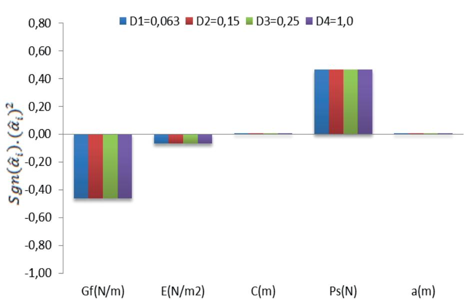
4.1.4 Índice de sensibilidade $\hat{\alpha}_i$ das variáveis na determinação da confiabilidade para CONC

De acordo com o algoritmo implementado e ilustrado na Figura 2.22, a quantidade $\hat{\alpha}_i$ é calculada por: comparações

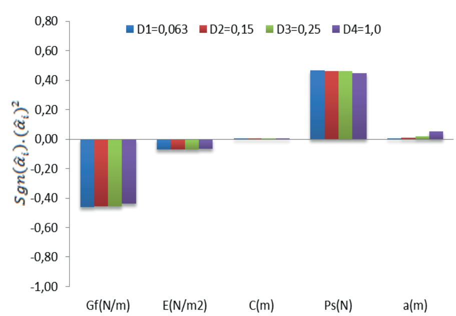
$$\hat{\alpha}_i = -\nabla G(u^*)/\|\nabla G(u^*)\| \qquad (4.4)$$

De acordo com a Equação (4.4), os $\hat{\alpha}_i$ são os cossenos diretores indicando a direção do ponto mais provável de falha (u^*), que está a uma distância β da origem no espaço normal padronizado. Assim, a magnitude de cada componente $\hat{\alpha}_i$, sendo *i* o índice relativo a cada variável, é um indicador direto da importância daquela variável para o índice de confiabilidade.

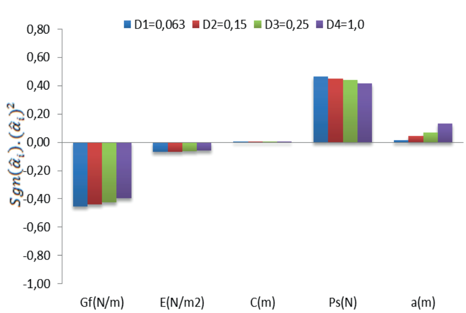
Os valores de $\hat{\alpha}_i$ para o caso I e F_s =1,1 são apresentados da Figura 4.10 á Figura 4.12, para os modelos EEB, MDP e MFLE, respectivamente. As mesmas figuras para F_s = 1,5 e 2,0 são apresentadas no Anexo B. Os gráficos consideram diferentes α (≅ 0; 0,1; 0,25; 0,40) e D (0,063; 0,15; 0,25; 1,0 m) nas análises de confiabilidade dos três modelos estudados (EEB, MDP e MFLE). Nota-se que, como explicado anteriormente, α→0 não pôde ser simulado para a MFLE, mas um valor pequeno α= 0,05 foi simulado.



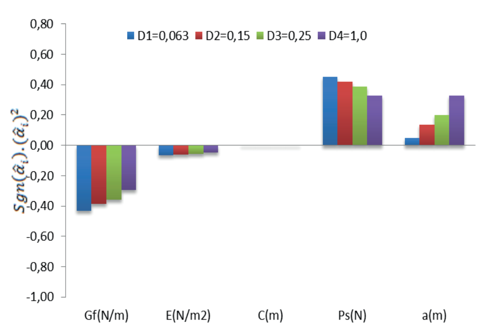
(a) α→0



(b) α=0,1

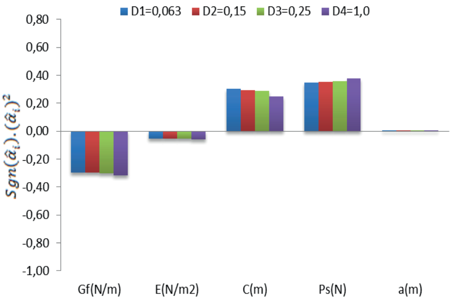


(c) α=0,25

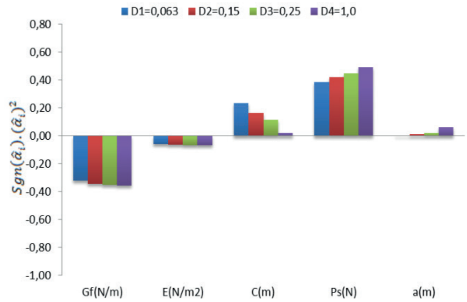


(d) α=0,4

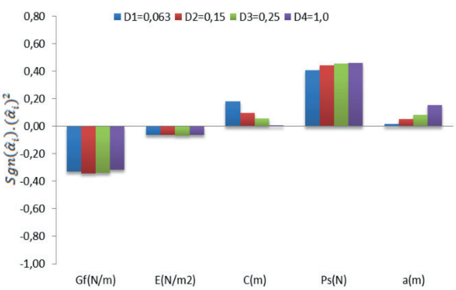
Figura 4.10. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo EEB, com F_s = 1,1 e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



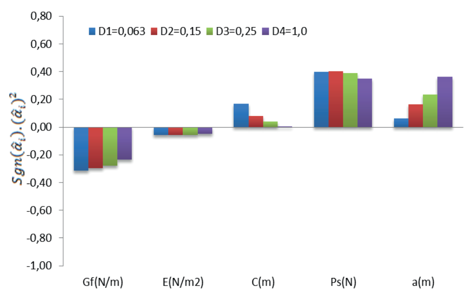
(a) α→0



(b) α=0,1



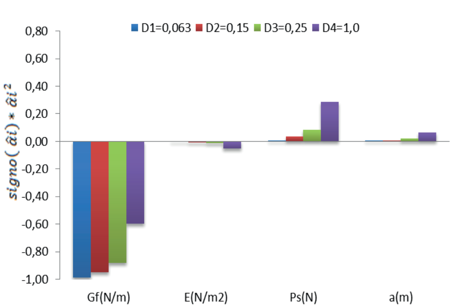
(c) α=0,25



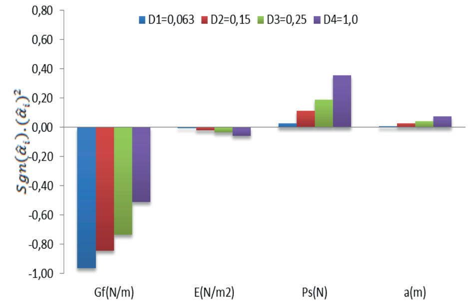
(d) α=0,4

Figura 4.11. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MDP, com $F_s = 1,1$ e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.

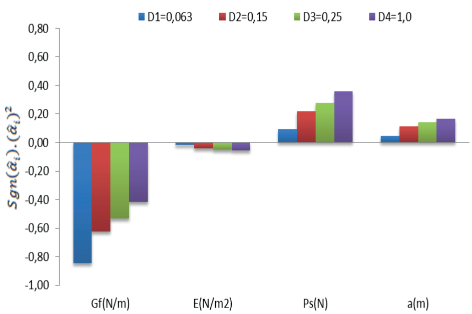
,



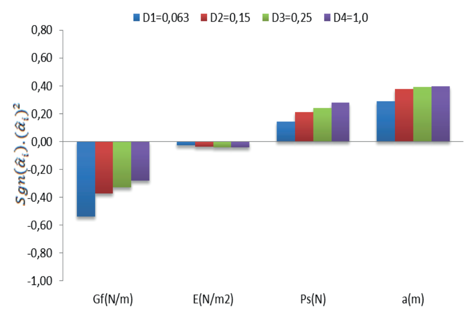
(a) α→0



(b) α=0,1



(c) α=0,25



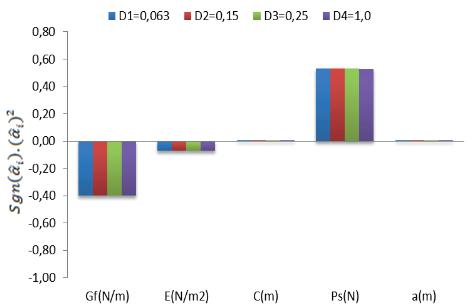
(d) α=0,40

Figura 4.12. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MFLE, com o F_s = 1,1 caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.

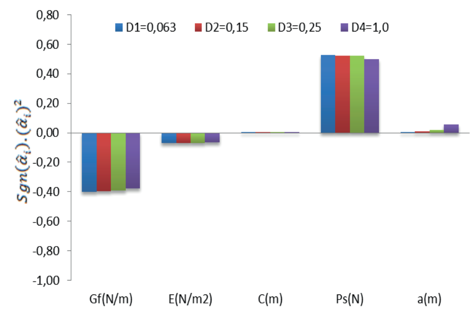
As variáveis de resistência/oferta (G_f e E) são identificadas por valores negativos de $\hat{\alpha}_i$ enquanto as variáveis de solicitação/demanda (P_s, a e C) por valores positivos dos cossenos diretores. Os gráficos indicam que a energia de fratura G_f e o carregamento P_s são as variáveis que mais influenciam na determinação do índice β para todos os valores de α e D em todos os modelos. É também evidente que todas as variáveis têm a mesma importância no cálculo de β para todos os tamanhos de viga (D). Uma exceção a esta tendência, e que o tamanho da trinca a_0 é ligeiramente mais importante para vigas mais espessas. Como esperado, o tamanho influencia significantemente a medida que α cresce, já que α= a_0/D. É importante esclarecer que a_0 tem influência mesmo para a_0 =/D→0, já que o valor nulo para α indica somente o valor médio μα=0, mas com uma assumida variação (CV=0.10) como indica a Tabela 3.4.

Finalmente, os valores de $\hat{\alpha}_i$ para C quantificam a maior influência do tamanho equivalente da ZP para o MDP. Isto se deve principalmente ao maior valor do CV quando aquela propriedade é calculada pelo MDP na Tabela 3.6. Nota-se que a influência de C é desprezível para o EEB devido ao baixo CV de C, segundo a Tabela 3.5 para material CONC. Todos os gráficos mostram que todas as variáveis consideradas como aleatórias têm uma importância no cálculo da confiabilidade e que nenhuma delas deve ser desprezada na análise de risco considerando a mecânica da fratura de vigas.

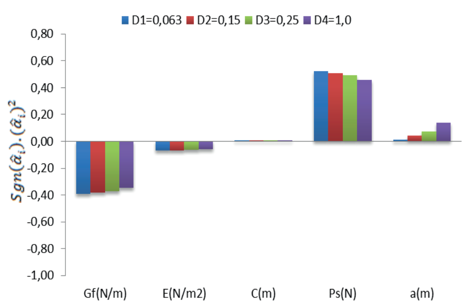
Similarmente, da Figura 4.13 á Figura 4.15 apresentam-se os valores dos cossenos diretores $\hat{\alpha}_i$ para o Caso II. As mesmas tendências observadas para o caso I e inclusive as magnitudes de $\hat{\alpha}_i$ têm valores similares quando comparadas ao caso I, com um F_s =1,1 e para os F_s=1,5 e 2,0, ilustrados no Anexo B.



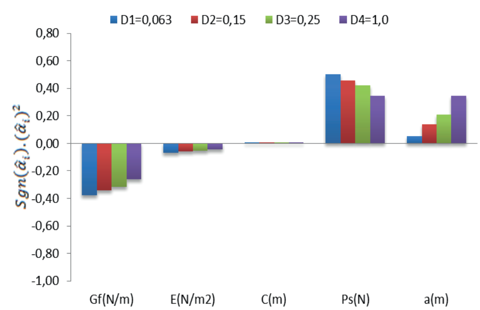
(a) α→0



(b) α=0,1

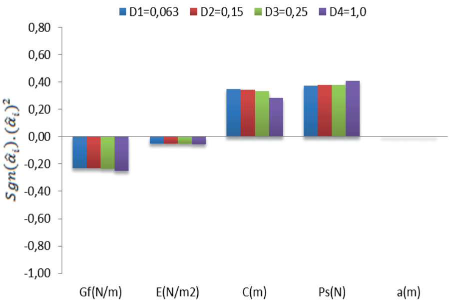


(c) α=0,25

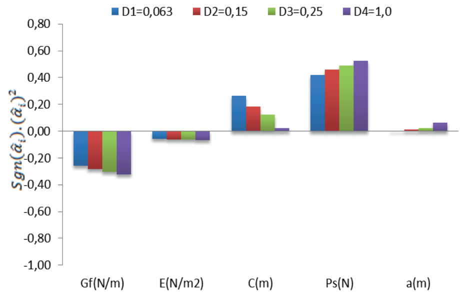


(d) α=0,40

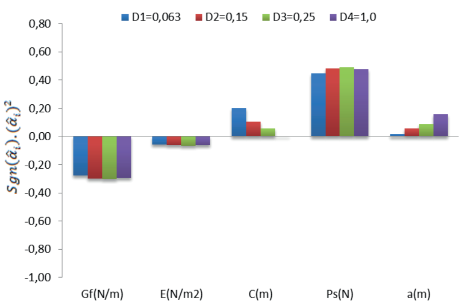
Figura 4.13. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo EEB, com F_s = 1,1 e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



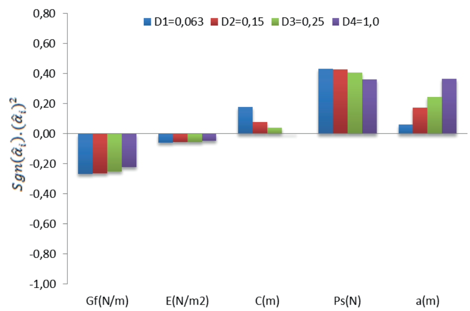
(a) α→0



(b) α=0,1

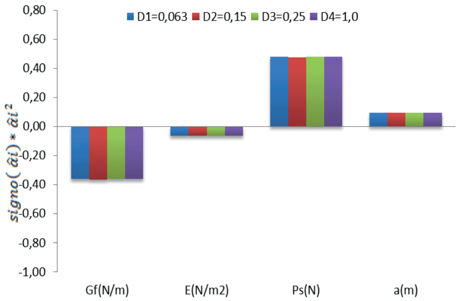


(c) α=0,25

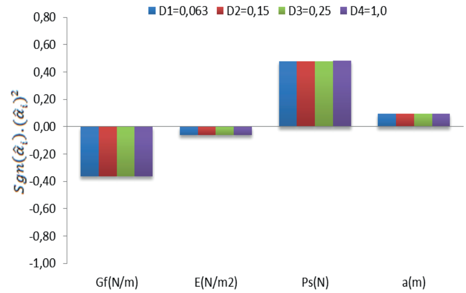


(d) α=0,40

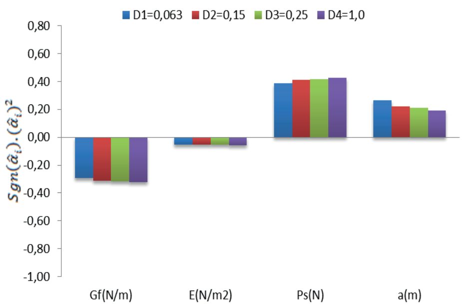
Figura 4.14. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MDP, com $F_S = 1{,}1$ e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



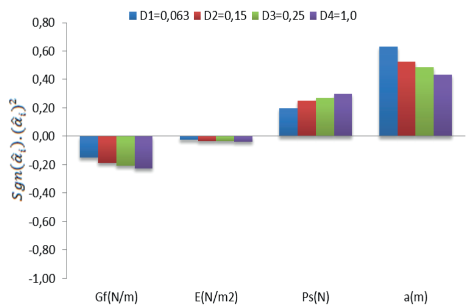
(a) α→0



(b) α=0,1



(c) α=0,25



(d) α=0,40

Figura 4.15. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MFLE, com F_s = 1,1 e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.

A Tabela 4.1, Tabela 4.2 e Tabela 4.3 apresentam o resumo para o material CONC e para os fatores F_s = 1,1;1,5 e 2,0, as tabelas com um critério de um 15% se analisa para cada parâmetro que influenciam no cálculo do índice β, sé tem incremento↑, diminuição↓, permanece constante_ o não tem influência_ com o incremento de α e *D*.

Tabela 4.1. Influência dos índices de sensibilidade $\hat{\alpha}_i$ com F_s = 1,1 para CONC e caso II

Parâmetro	*EEB*	*MDP*	*MFLE*
G_f (N/m)	α D↓	α D*↑	α ↓D↓
E (*N/m*^{2})	-	-	-
C (mm)	-	α ↓D↓	-
P_s *(N)*	α D↓	α D↑	α ↓D↑
a_0 *(m)*	α ↑D↑	α ↑D↑	α ↑D*↑

Tabela 4.2. Influência dos índices de sensibilidade $\hat{\alpha}_i$ com F_s = 1,5 para CONC e caso II

Parâmetro	*EEB*	*MDP*	*MFLE*
G_f (N/m)	α D↓	α D*↑	α ↓D↑
E (*N/m*^{2})	-	-	-
C (mm)	-	α ↓D↓	-
P_s *(N)*	α D↓	α ↑D	α ↓D
a_0 (*m*)	α ↑D↑	α ↑D↑	α ↑D↑

Tabela 4.3. Influência dos índices de sensibilidade $\hat{\alpha}_i$ com F_s = 2,0 para CONC e caso II.

Parâmetro	*EEB*	*MDP*	*MFLE*
G_f (N/m)	α D↓	α D↓	α ↓D↑
E (*N/m*^{2})	-	-	-
C (mm)	-	α ↓D↓	-
P_s *(N)*	α* D↓	α D*↓	α ↓D
a_0 (*m*)	α ↑D↑	α ↑D↑	α ↑D↓

4.2 CONCRETO RECICLADO (FRAP)

Os resultados de confiabilidade e de predição determinística de resistência para diferentes tamanhos de viga FTP e de trinca, variando os α para o material FRAP com F_S=1,1, avaliado como o algoritmo (HL-RF).

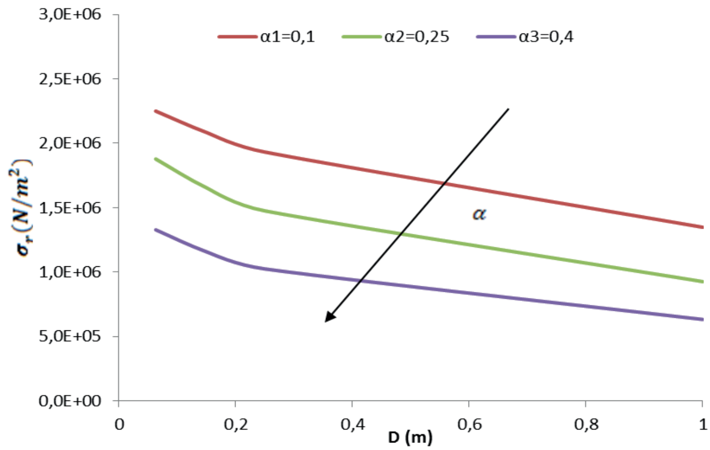
4.2.1 Predição determinística do efeito de escala da resistência em vigas FTP para FRAP

A predição da (σ_r) para o FRAP com relação à geometria da viga para os três modelos estudados é realizada da mesma maneira que para o CONC com as mesmas equações de desempenho. A mostra a dependência de com o tamanho das vigas, *D* e o tamanho relativo das trincas (α_0 =a_0/*D*) para um de F_S=1,1. Os gráficos foram gerados de acordo com a análise usual determinística, em que são utilizadas as médias *μ* para o FRAP, com os parâmetros da Tabela 3.2 á Tabela 3.6.

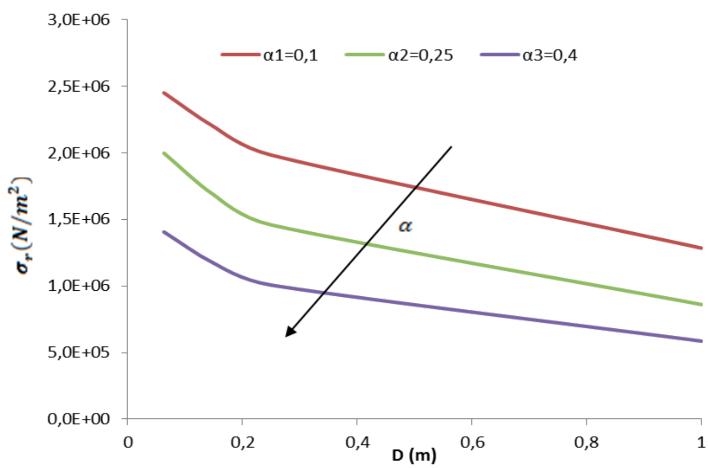
Para EEB e MDP, apresenta-se o mesmo efeito de escala de diminuição da σ_r com o aumento do tamanho da viga, como ilustrado nas tendências das curvas da Figura 4.16 nos itens (a) e (b). Os dois modelos utilizam a mesma equação de σ_r, portanto as curvas de predição são similares e as diferenças são atribuídas aos parâmetros G_f e *C*, que são maiores quando calculados pela metodologia EEB.

Em vigas de FRAP para pequenos valores de α=0,1 com (*D*=0,063m), os modelos EEB e MDP também apresentam falhas de predição devido ao tamanho de ZP. As predições da MFLE, na Figura 4.16 para o item c), são bem conservadoras quando comparadas

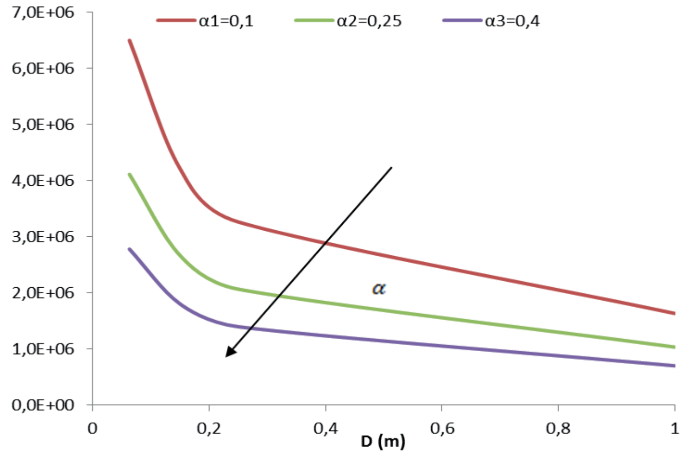
às preditas pelo EEB e MDP. Além disso, as curvas de predição de resistência σ_r para o material (FRAP) tem um comportamento similar as curvas de resistência apresentadas por o material (CONC) na Figura 4.1, com a única diferencia de que o material (FRAP) ilustro valores de resistência menores em comparação com o material (CONC).



(a) EEB



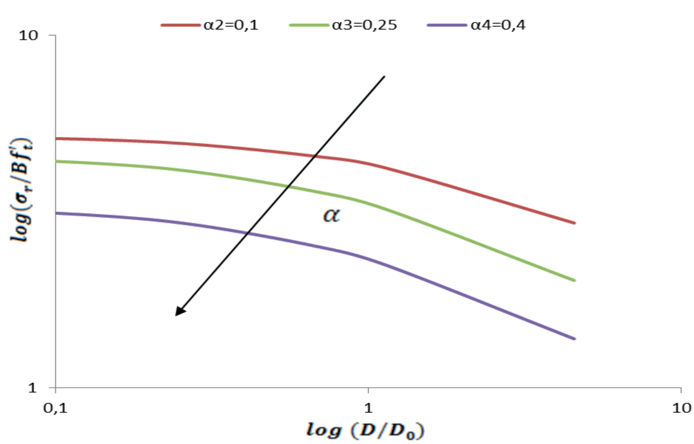
(b) MDP



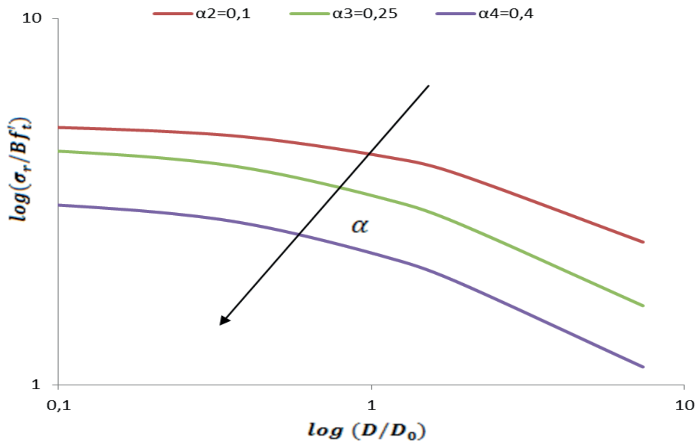
(c) MFLE

Figura 4.16. Predição deterministica da resistência σ_r e efeito de escala para a viga de FTP (FRAP): (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE.

As curvas da resistência nominal com o aumento de tamanho em escala logarítmica são ilustradas na Figura 4.17. Assim como observado para o CONC, as curvas comportam-se como o efeito de escala clássico conforme Figura 2.5.



(a) EEB



(b) MDP

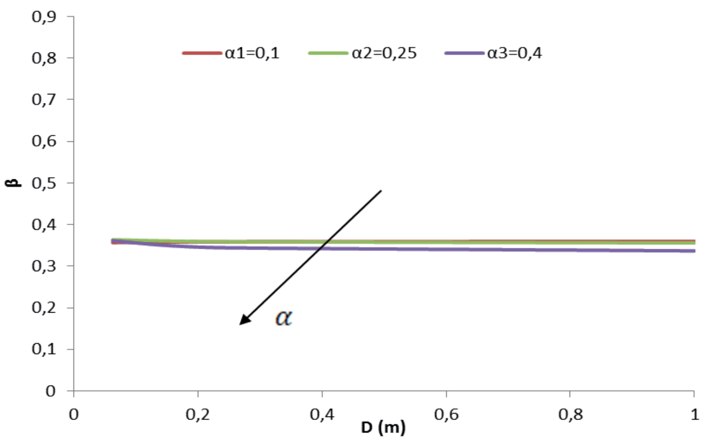
Figura 4.17. Predição deterministica da resistência σ_r e efeito de escala para a viga de FTP em escala logaritmica (FRAP): (a) EEB e (b) MDP.

Com relação a comparação das resistências entre as vigas de CONC (Figura 4.1 e Figura 4.2) e FRAP (Figura 4.16 e Figura 4.17). Como esperado, o efeito de escala é descrito pelo EEB e MDP através da diminuição da σ_r com o aumento do tamanho da espessura viga, como ilustram as tendências das curvas. As análises para estes materiais apresentam curvas com o mesmo comportamento e com as mesmas limitações para valores pequenos de *D* nos quais tem-se dificuldade com a convergência quando *D* aproxima-se á ZP, e as únicas diferenças estão nos valores dos parâmetros utilizados que são distintos para cada material. É importante notar que apesar dos materiais terem a mesma tendência, encontrarem-se valores de resistência maiores no CONC que para o FRAP, devido as características dos parâmetros dos materiais.

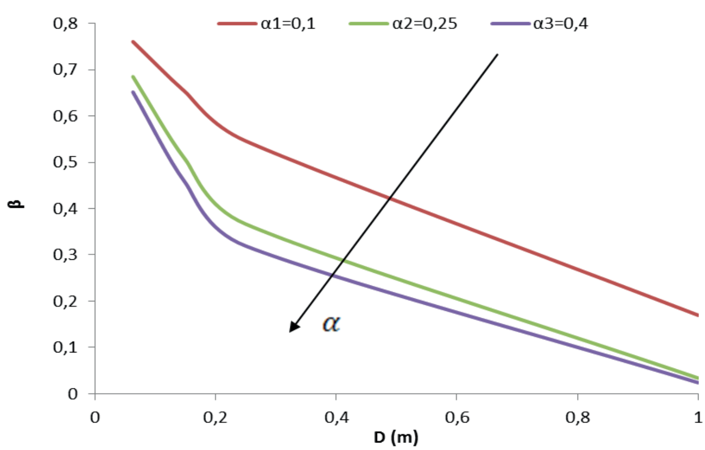
4.2.2 Predição do índice de confiabilidade β e efeito de escala da resistência em vigas FTP

Os índices β, para um foram determinados com o mesmo algoritmo e seguindo as mesmas equações de desempenho que no CONC, a Figura 4.18 apresenta os resultados de β para diferentes geometrias de viga e tamanhos relativo de trincas ($\alpha_0 = a_0$/D) e $F_s = 1{,}1$, como indicado na figura, as análises foram realizadas para as propriedades extraídas dos diferentes modelos EEB, MDP e MFLE para o caso II de FRAP, que definem as variáveis aleatórias com uma distribuição lognormal (ver Tabela 3.2 á Tabela 3.6). O material FRAP analisou-se com a distribuição lognormal porque é uma de as mais usadas para fazer caracterização de parâmetros de laboratório, e porque está distribuição está limitada só para valores positivos.

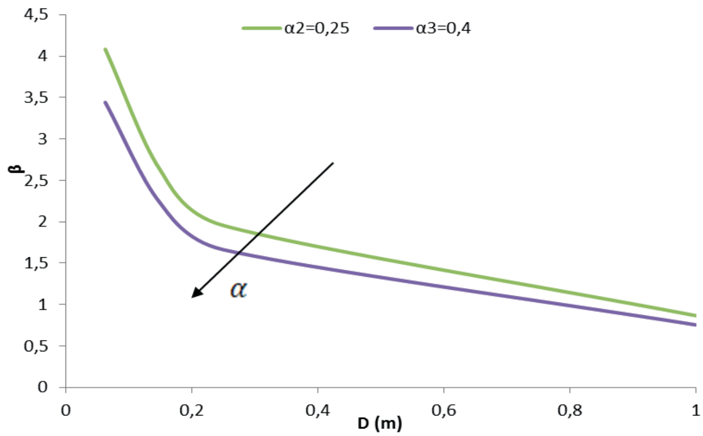
Os índices de confiabilidade calculados para o EEB, MDP e MFLE demostram que devido ao efeito de escala, os índices β decrescem com o aumento da espessura da viga. Observa-se que o EEB tem um menor efeito de escala para β, como ilustram as curvas quase constantes. Os valores crescentes do tamanho da trinca relativos à altura, dados pela variável α, diminuem a confiabilidade e aumentam, desta forma, a probabilidade de falha.



(a) EEB



(b) MDP



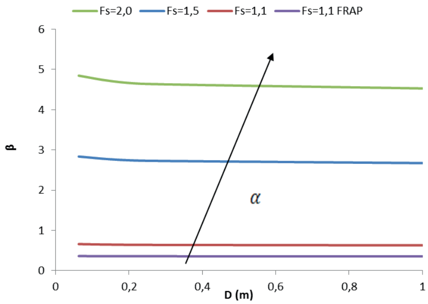
(c) MFLE

Figura 4.18. Predição do índice de confiabilidade β para material FRAP, com F_S = 1,1 e Caso II: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE.

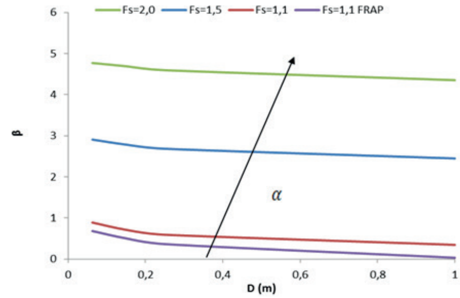
É relevante notar que MFLE apresenta maiores limitações na convergência para α→0 e α=0,1 para valores pequenos de *D*, onde a espessura aproxima-se á ZP, como pode evidenciar-se na Figura 4.18 para o item c.

Os índices de β, tanto para o CONC quanto para FRAP, seguiram análises com o mesmo algoritmo e com as mesmas equações de desempenho, variando os parâmetros característicos de cada material e apresentaram curvas com trajetórias similares e com incidência do efeito de escala, onde os valores de β decrescem com o aumento da espessura da viga para os dois materiais. O modelo de EEB para os dois materiais ilustra curvas constantes que são conservadoras em comparação com os outros dois modelos MDP e MFLE. Para todos os modelos os maiores índices β forem identificados para as menores relações de α, e para os menores valores da espessura da viga *D*.

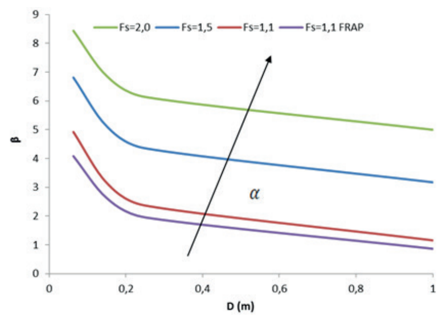
Para uma comparação com os resultados para o CONC, a Figura 4.19 apresenta os valores de β para F_S=1,1 e α =0,25. Note que as curvas do FRAP têm um comportamento similar as curvas do CONC, mas com índices de confiabilidade menores para todos os modelos (EEB, MDP e MFLE).



(a) EEB



(b) MDP



(c) MFLE

Figura 4.19. Índices de confiabilidade CONC e FRAP caso II com α=0,25 e para F_S = 1,1 ;1,5 e 2,0: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE

A Figura 4.20 em 3D para o material FRAP com F_S = 1,1 e caso II apresenta os índices β em função de *D* e α, estabelecendo comparação entre EEB e MDP para os quais se ilustra uma incidência do efeito de escala de Bazant de uma diminuição dos índices β, com o incremento do de *D* e α.

Com índices β maiores para o MDP em comparação com EEB, um comportamento similar ao do material CONC para o mesmo valor de F_S = 1,1.

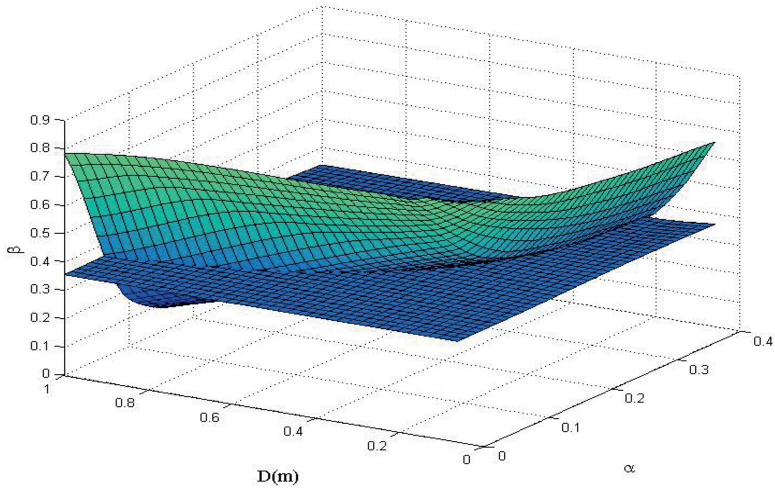
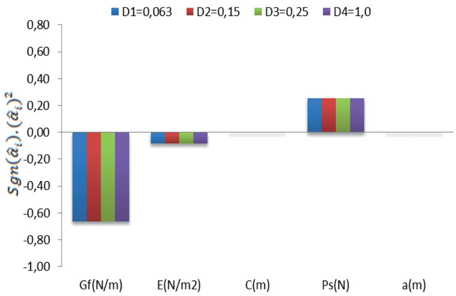


Figura 4.20. Índices de confiabilidade β com F_S = 1,1 para os modelos EEB e MDP, material FRAP (caso II)

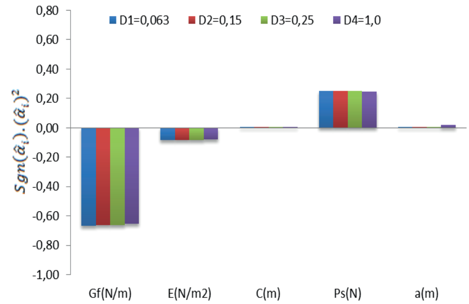
4.2.3 Índice de sensibilidade $\hat{\alpha}_i$ das variáveis na determinação da confiabilidade

Os índices de sensibilidade para o concreto reciclado estão definidos pela Equação (4.4) e são apresentados na Figura 4.21 á Figura 4.23 para o Caso II do FRAP. Os $\hat{\alpha}_i$ ou cossenos diretores apresentam uma tendência de valores negativos para as variáveis G_f e E, e uma tendência de valores positivos para as variáveis P_s, a_0 e C. A energia de fratura G_f e o carregamento P_s são as variáveis que mais influenciam as análises de confiabilidade. É importante esclarecer que a tem influência mesmo para α= *a0*/D→0, já que o valor nulo para α indica somente o valor médio μα=0, mas com uma assumida variação (CV=0,10), como indica a Tabela 3.4.

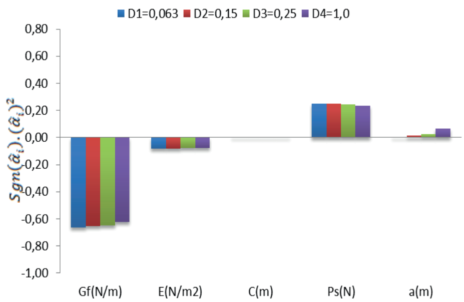
Finalmente, os valores de $\hat{\alpha}_i$ para *C* quantificam a maior influência da zona de processo para o MDP. Isto se deve, principalmente, ao maior valor do CV quando aquela propriedade é calculada pelo MDP (Tabela 3.6) para o concreto reciclado. Observa-se que a influência de *C* é desprezível para o EEB devido ao baixo COV de *C,* de acordo com a Tabela 3.5. Ainda alguns dos parâmetros analisados tenham maior influência o maiores índices de sensibilidade, todos são de grande importância e ninguém de eles deverá de ser desprezado.



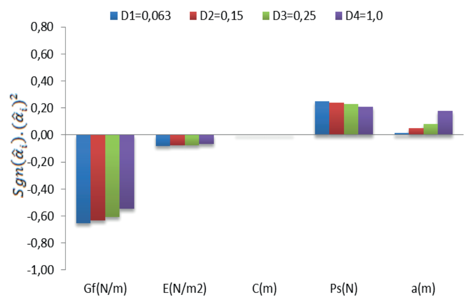
(a) α→0



α=0,1 (b)

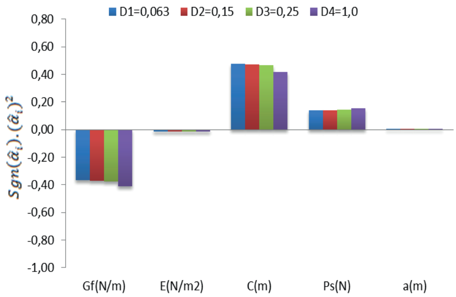


(c) α=0,25

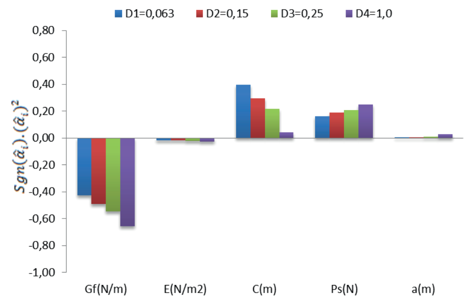


(d) α=0,40

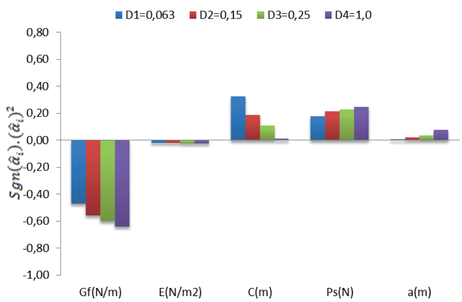
Figura 4.21. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material FRAP, modelo EEB, com F_S = 1,1 e caso II: (a) α→0; (b) α=0.1; (c) α=0.25 e (d) α=0.4.



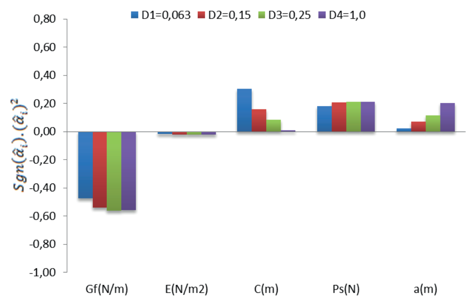
(a) α→0



α=0,1 (b)

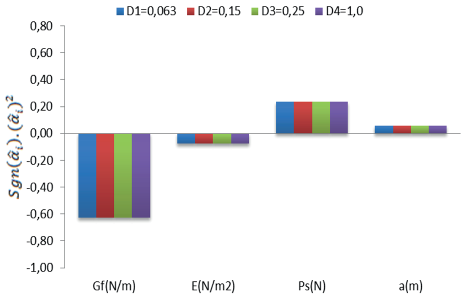


(c) α=0,25

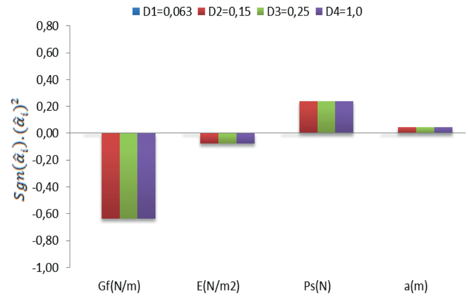


(d) α=0,40

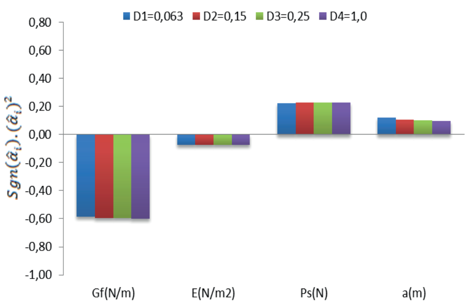
Figura 4.22. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material FRAP, modelo MDP, com F_S = 1,1 caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



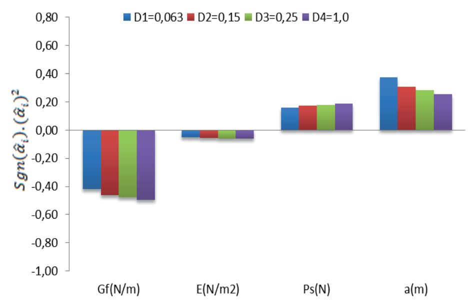
(a) α→0



(b) α=0,1



(c) α=0,25



(d) α=0,4

Figura 4.23. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material FRAP, modelo MFLE, com F_s = 1,1 e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.

A Tabela 4.4 apresentam o resumo para o material FRAP e para os fatores F_s = 1,1, com um critério de um 15% se analisa para cada parâmetro que influenciam no cálculo do índice β, sé tem incremento↑, diminuição↓, permanece constante_ o não tem influência_, com o incremento de α e *D*.

Tabela 4.4. Influência dos índices de sensibilidade $\hat{\alpha}_i$ com F_S= 1,1 para FRAP e caso II.

Parâmetro	*EEB*	*MDP*	*MFLE*
G_f (N/m)	α D↓	α↑ D↑	α ↓D
E (*N/m*^{2})	-	-	-
C (mm)	-	α ↓D↓	-
P_s *(N)*	-	α D*↑	α ↓D
a_0 *(m)*	α ↑D↑	α ↑D↑	α ↑D*↑

ANÁLISE PROBABILÍSTICA DA RESISTÊNCIA DE VIGAS PELO MÉTODO DE MONTE CARLO (MMC)

Neste capítulo as funções de densidade de probabilidade (FDP) da resistência de vigas em FTP são obtidas usando a técnica de simulação do método de Monte Carlo (MMC). As análises com o MMC utilizam o metodologia descrita na Seção 2.7 com os parâmetros de laboratório ensaiados para os concretos CONC e FRAP. As simulações foram realizadas seguindo a mesma equação de desempenho para o EEB e para MDP dada pela Equação (2.25) de σ_r, para um número de simulações $N = 50000$.

No MDP, os tipos de distribuições que seguem os parâmetros G_f e $CTOD_C$ foram determinadas por meio de simulações de números aleatórios e um teste de aderência a partir dos dados de laboratório do ensaio do MDP. O parâmetro C foi calculado indiretamente dos resultados daqueles parâmetros por meio das equações descritas na Seção 2.3.2, especificamente a Equação (2.43). No modelo EEB, as distribuições de C e G_f foram determinadas por meio da simulação de números aleatórios, para as equações da Seção 2.3.1, e posteriormente com um teste de aderência.

O método de Monte Carlo para os EEB e para MDP, foi realizado por meio da variação geométrica da viga com α (0,05; 0,1; 0,40) e D (0,063; 0,15; 0,50; 1,0 m), sendo $\alpha_0 = \alpha_0/D$.

Para parâmetros de fratura determinados em laboratório e para a simulação de resistência da viga FTP, forem feitos testes de aderência com o programa de matlab gerando números aleatórios com a função random para N=50000 simulações para obter a FDP, e depois por meio da ferramenta dfittool foi possível conhecer o tipo de distribuição que melhor ajustava-se a FDP de cada parâmetro analisado. É importante mencionar que os testes de aderência estão no anexo *D*.

5.1 PARÂMETROS DE FRATURA DETERMINADOS EM LABORATÓRIO

A Tabla 5.1 apresenta os dados dos parâmetros de laboratório que forem utilizadas para gerar a simulação do MMC para determinar as características probabilísticas e tipos de distribuições dos parâmetros C e G_f, para o EEB, e C, G_f e $CTOD_C$, para o MDP. Note que a μ, σ e tipo de distribuição dos parâmetros da Tabela 5.1 foram determinados baseados nos resultados dos ensaios das vigas como descrito na Seção 3.1. e na Seção 3.2. para CONC.

Tabela 5.1. Parâmetros estatísticos obtidos de laboratório para as simulações do MMC

Variáveis	μ	σ	*Distribuição*
$g(a_0)$	48,18	3,60	Normal
$g'(a_0)$	207,04	14,02	Normal
$B_0(m^2/N)$	3,14E-12	0,49E-12	t-student
A (N/m)	1,97E-11	0,29E-11	t-student
E (N/m^2)	34,82E+09	0,07E+09	lognormal

A partir dos dados estatísticos da Tabela 5.1, as funções densidade de probabilidade (FDP) para a energia de fratura G_f para os modelos EEB e MDP são apresentadas na Figura 5.1. As densidades foram determinadas por meio de N = 50000 simulações do MMC para os modelos EEB e MDP segundo a Equação (2.21) para o método de EEB e a partir de um teste de aderência dos dados obtidos do laboratório para G_f no MDP respectivamente. Os parâmetros estatísticos das FDP são apresentados na Tabela 5.2 para os dois modelos. O tipo de distribuição indicado foi determinado pela distribuição que melhor se adaptou a curva da distribuição simulada.

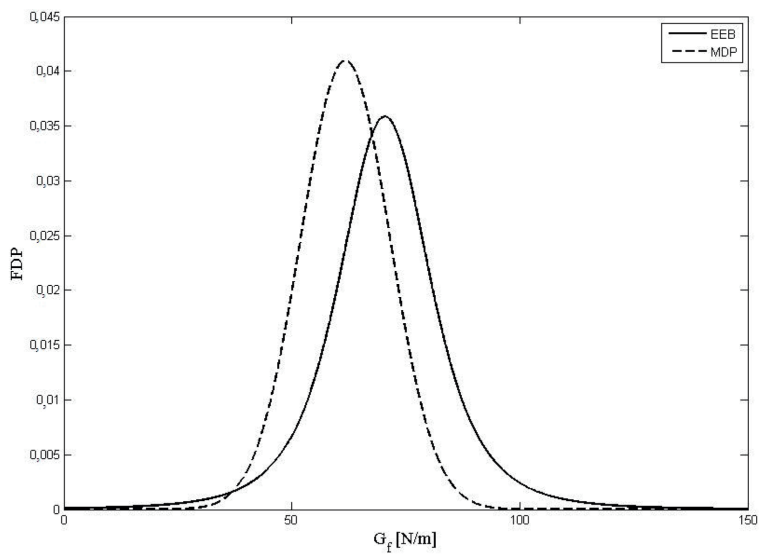


Figura 5.1. Função densidade de probabilidade (FDP) do parâmetro G_f para modelos: EEB (distribuição t-student) e MDP (distribuição normal).

Embora os dois modelos tenham PDF de tipos diferentes: distribuição t-student para G_f segundo o EEB, e distribuição normal quando calculado segundo as equações do MDP, ambas as curvas são similares em sua forma. A distribuição t-student faz parte das distribuições de probabilidade contínuas, onde as curvas de densidade tem uma distribuição com forma de sino com uma tendência similar à distribuição normal padrão.

Tabela 5.2. Parâmetros das FDP de G_f (N/m).

Parâmetros	*EEB*	*MDP*
μ	70,392	61,740
σ	10,357	9,740
CV	0,147	0,150
v_x	3,457	-
Distribuição	t-student	normal

Similarmente, as funções densidade de probabilidade (FDP) para o tamanho equivalente da zona de processo, *C*, para os modelos EEB e MDP são apresentadas na Figura 5.2. Estas densidades também foram determinadas por meio de *N* = 50000 simulações do MMC para os modelos EEB e MDP segundo as Equações (2.22) e (2.43), respectivamente. Os parâmetros estatísticos das FDP são apresentados na Tabela 5.3 para os dois modelos. O tipo de distribuição indicado foi determinado pela distribuição que melhor se adaptou a curva da distribuição simulada.

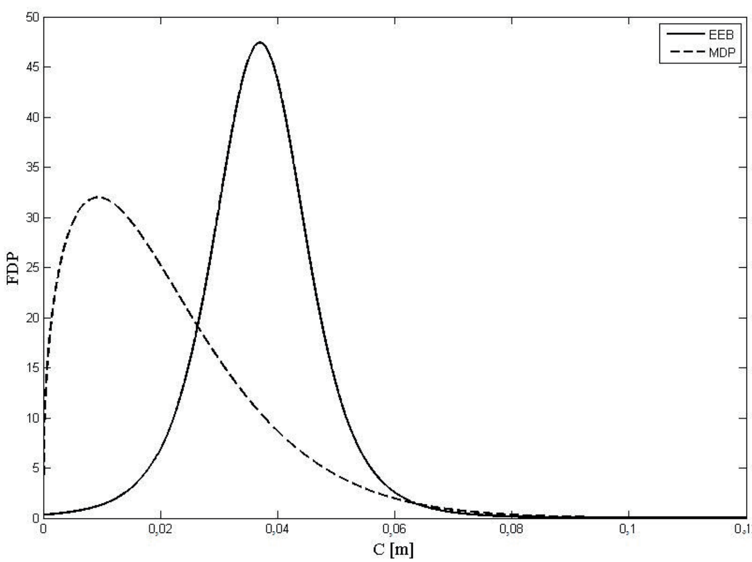


Figura 5.2. Função densidade de probabilidade (FDP) do parâmetro *C* para os modelos: EEB (distribuição t-student) e MDP (distribuição Weibull).

Os dois modelos induzem PDF de tipo e forma distintas: distribuição t-student para *C* calculado pelo EEB, e distribuição Weibull quando calculado segundo as equações do MDP. É importante observar também a diferença marcante entre as médias para as duas distribuições, com um valor significantemente maior para a média de *C* pelo EEB. A maior dispersão da FDP gerada pelo MDP também pode ser observada na curva e pelos valores maiores dos parâmetros σ e *CV*.

Tabela 5.3. Parâmetros das FDP de *C (mm)*.

parâmetros	*EEB*	*MDP*
μ	37,000	21,000
σ	8,000	14,000
CV	0,216	0,667
v_x	4,951	-
λ	-	23,000
γ	-	1,397
Distribuição	t-student	Weibull

A principal diferença entre as metodologia para a determinação de *C* determinado pelo MDP, é que este é calculado através da propriedade de fratura $CTOD_C$ de acordo com a Equação (2.39). Desta forma, a Figura 5.3 apresenta a FDP com os valores dos parâmetros da curva descritos na Tabela 5.4.

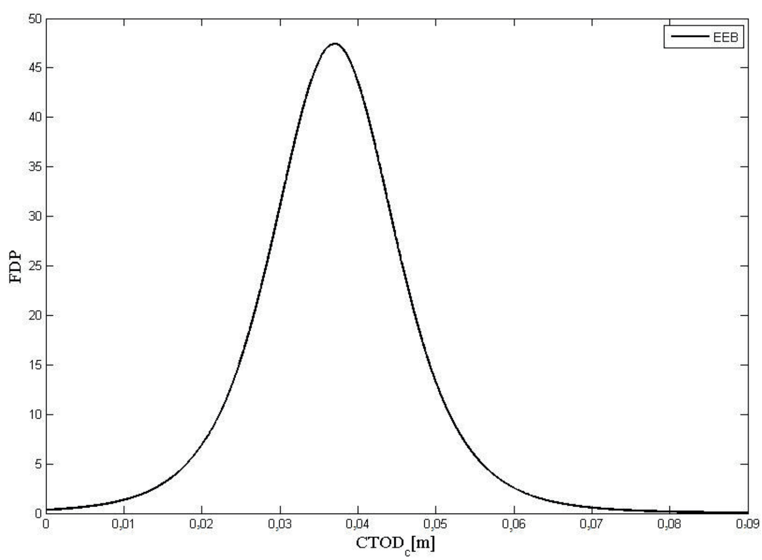


Figura 5.3. Função densidade de probabilidade (FDP) do parâmetro $CTOD_C$ para o MDP (distribuição normal).

Tabela 5.4. Parâmetros da FDP de $CTOD_C$ (m) do MDP.

Parâmetros	*MDP*
μ	0,016
σ	0,006
CV	0,375
Distribuição	Normal

5.2 SIMULAÇÃO DA RESISTÊNCIA (σ_r) DA VIGA FTP

Com base nos parâmetros estatísticos para as propriedades de fratura de cada modelo (EEB e MDP) da seção anterior, simulações da resistência, σ_r, da viga FTP foi realizada por meio do MMC com 50000 combinações aleatórias simuladas para a predição da resistência da viga (ver Figura 2.4) segundo a Equação (2.25). Diferentes combinações de geometria foram consideradas para a viga FTP com α (0,05; 0,1; 0,40) e D (0,063; 0,15; 0,50; 1,0 m). Os parâmetros estatísticos para a geometria da viga adotados para as simulações são mostrados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5. Parâmetros geometricos para a viga FTP a serem usados para simulações do MMC

Variáveis	*μ*	*σ*	*Distribuição*
α *(m)*	(0,05; 0,1; 0,40)	0,10	Lognormal
D(m)	[0,063;0,15;0,5;1,0]	---	Determinístico
t (m)	0,08	---	Determinístico

As curvas das FDP adaptadas aos dados simulados pelo MMC são apresentadas da Figura 5.4 à Figura 5.7 para tamanhos de viga *D* de 0,063 m, 0,15 m, 0,50 m e 1,0 m, respectivamente. Para cada figura de um determinado tamanho, as FDP para os valores médios de α, como indicados na Tabela 5.5, são plotadas para ambos os modelos analisados: EEB e MDP. Assim pode-se comparar diretamente as curvas geradas para diferentes tamanhos relativos de trinca (α) e modelos de fratura em um determinado tamanho D.

Os parâmetros estatísticos das FDP ilustradas nas figuras são descritos quantitativamente da Tabela 5.6 à Tabela 5.13 para todos os tamanhos analisados e os dois modelos. As tabelas também indicam o tipo de distribuição que melhor se adaptou aos dados simulados pelo MMC.

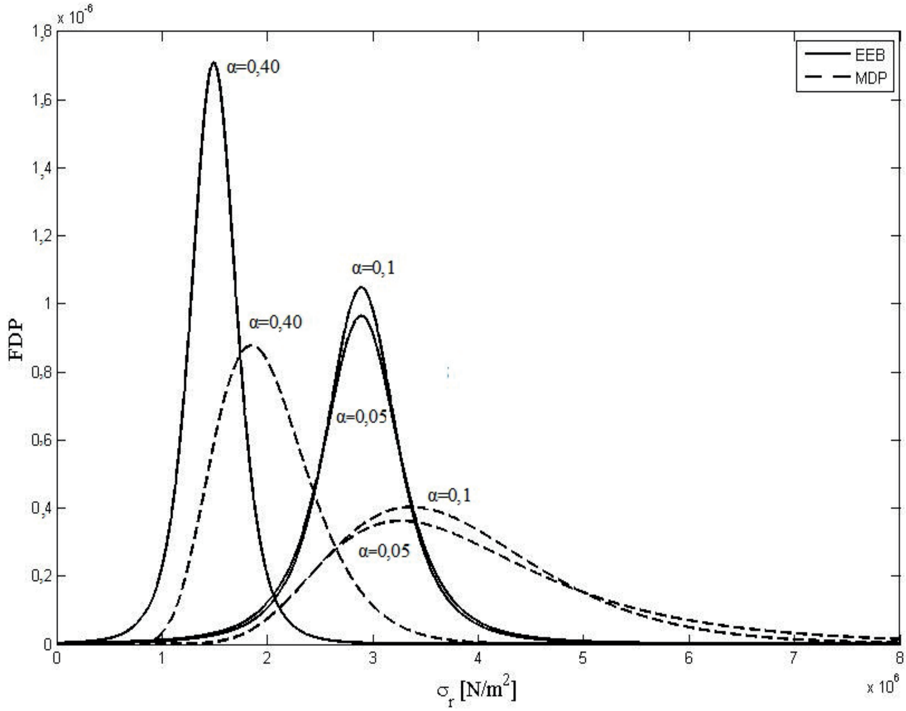


Figura 5.4. Função densidade de probabilidade (FDP) de σ_r para EEB e MDP com D = 0,063 m.

Tabela 5.6. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m²) para EEB com *D*=0,063 m.

	α=0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	2,89E+06	2,89E+06	1,49E+06
σ	0,38E+06	0,35E+06	0,22E+06
CV	0,131	0,121	0,148
v_x	2,896	2,923	4,154
Distribuição	t- Student	t- Student	t- Student

Tabela 5.7. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m²) para MDP com *D* = 0,063 m.

	α=0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	3,35E+06	3,79E+06	2,01E+06
σ	1,02E+06	1,10E+06	0,49E+06
CV	0,304	0,290	0,243
μ_Y	-	15,108	14,487
σ_Y	-	0,283	0,239
k_x	0,090	-	-
Distribuição	VEG.	Lognormal	Lognormal

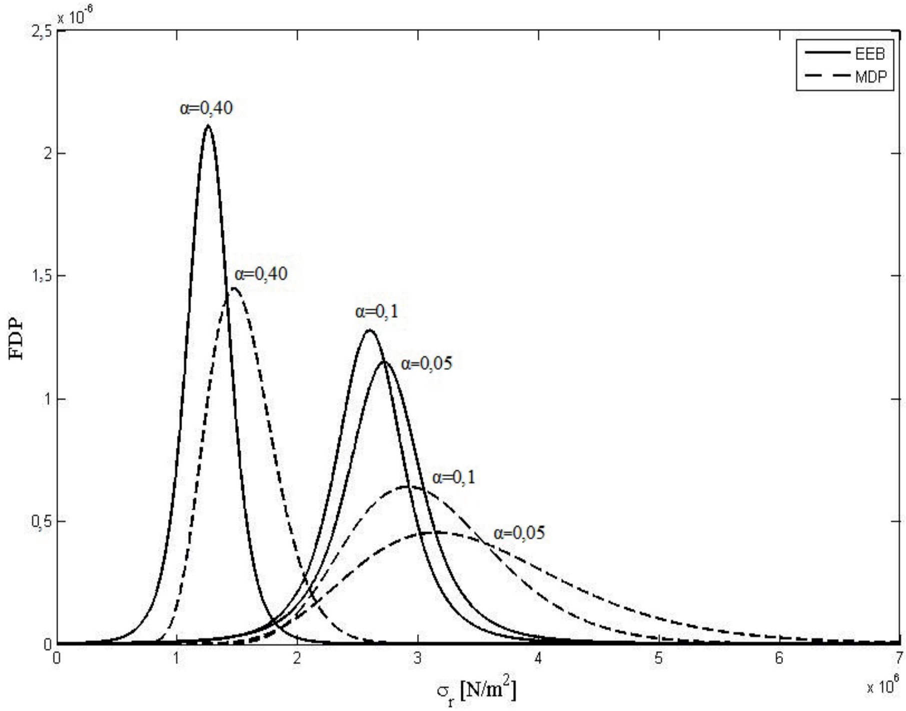


Figura 5.5. Função densidade de probabilidade (FDP) de σ_r para EEB e MDP com D= 0,15 m.

Tabela 5.8. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m2) para EEB com D=0,15 m.

	α=0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	2,72E+06	2,60E+06	1,26E+06
σ	0,32E+06	0,29E+06	0,18E+06
CV	0,117	0,111	0,143
v_x	3.005	3,380	5,104
Distribuição	t- student	t- student	t- student

Tabela 5.9. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m^2) para MDP com *D* = 0,15 m.

	α=0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	3,51E+06	3,11E+06	1,55E+06
σ	0,96E+06	0,66E+06	0,29E+06
CV	0,27	0,212	0,187
μ_Y	15,035	14,929	14,236
σ_Y	0,269	0,209	0,184
Distribuição	Lognormal.	Lognormal	Lognormal

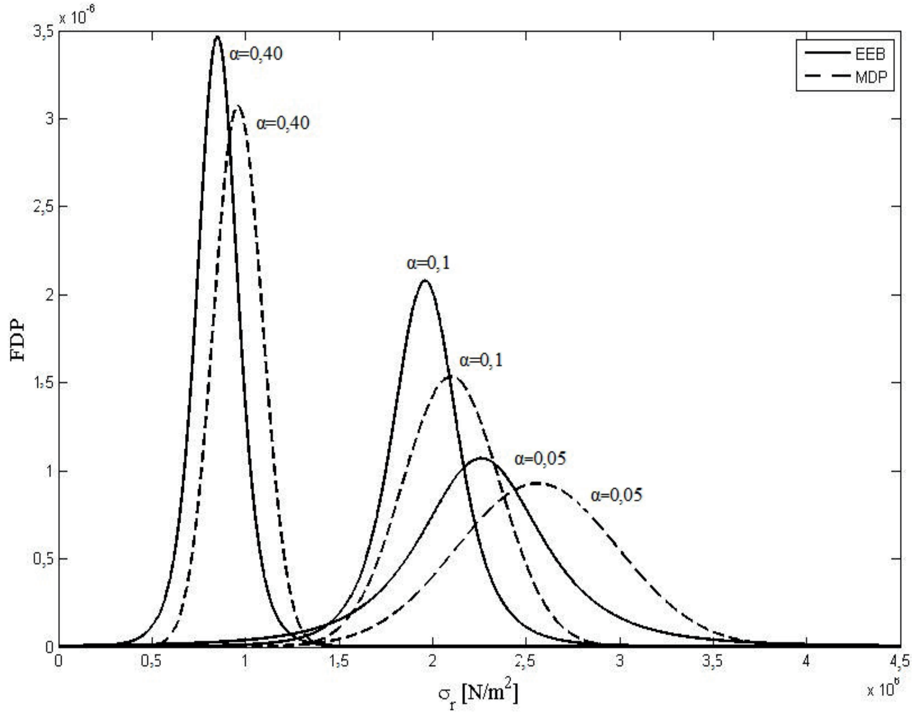


Figura 5.6. Função densidade de probabilidade (FDP) de σ_r para EEB e MDP com D =0,5 m

Tabela 5.10. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m^2) para EEB com D = 0,5 m.

	α=0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	2,26E+06	1,96E+06	0,85E+06
σ	0,23E+06	0,18E+06	0,11E+06
CV	0,102	0,092	0,129
v_x	3,600	3,864	5,541
Distribuição	t- student	t- student	t- student

Tabela 5.11. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m^2) para MDP com D = 0,5 m.

	α=0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	2,56E+06	2,10E+06	0,96E+06
σ	0,43E+06	0,26E+06	0,13E+06
CV	0,168	0,124	0,135
Distribuição	Normal	Normal	Normal

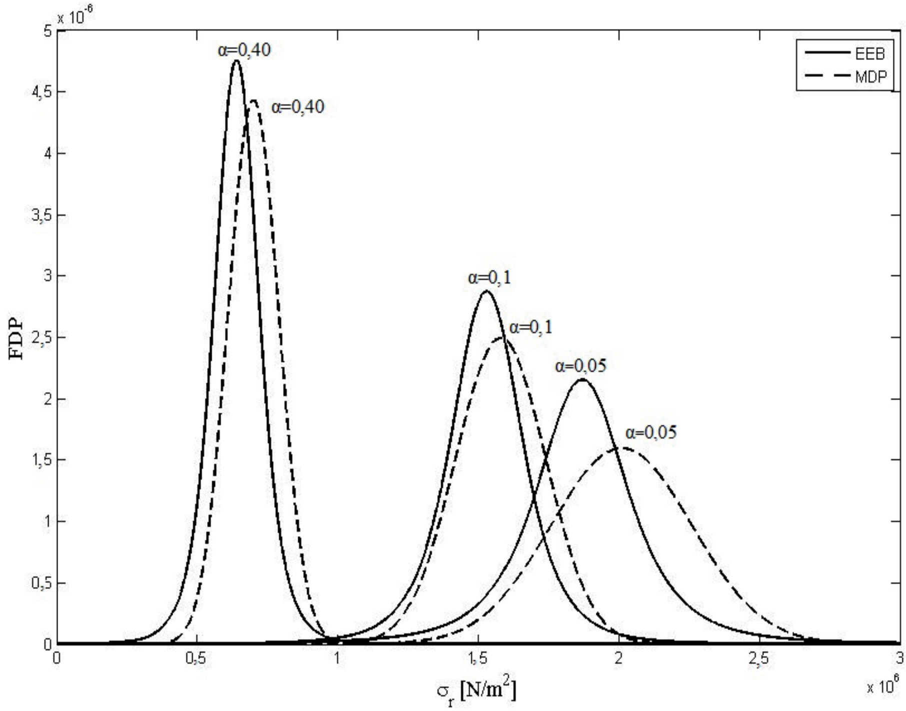


Figura 5.7. Função densidade de probabilidade (FDP) de σ_r para EEB e MDP com D=1,0

Tabela 5.12. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m²) para EEB com *D*=1,0 m.

	α =0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	1,87E+06	1,53E+06	0,64E+06
σ	0,17E+06	0,13E+06	0,08E+06
CV	0,090	0,085	0,125
v_x	3,835	3,799	5,448
Distribuição	t- Student	t- Student	t- Student

Tabela 5.13. Parâmetros da FDP de σ_r (N/m²) para MDP com *D* = 1,0 m.

	α =0,05	*α=0,1*	*α=0,4*
μ	2,01E+06	1,58E+06	0,70E+06
σ	0,25E+06	0,16E+06	0,09E+06
CV	0,124	0,101	0,129
Distribuição	Normal	Normal	Normal

Ao comparar as curvas geradas para as diferentes geometrias nos modelos de EEB e MDP, pode-se observar que a resistência σ_r para o EEB seguem predominantemente distribuições t-student para todos os tamanhos relativos de trinca e tamanhos de viga. Por outro lado, o MDP apresentou distribuições variadas, dentre elas valor extremo generalizado (VEG), lognormais, e normais.

Analisando especificamente as PDF para o modelo EEB, a resistência σ_r segue distribuição t-student com o parâmetro grau de liberdade, v_x, crescente com o aumento de α. É importante observar que a distribuição t-student é bem similar a distribuição normal, mas apresenta as caudas (*tail* da distribuição) mais alongados. Ademais, as PDF apresentam uma crescente dispersão com o aumento de *D*.

Para as distribuições do modelo de MDP, a resistência σ_r apresenta, na maioria dos casos (diferentes *D* e α) distribuições normais e lognormais. Por outro lado, a distribuição de VEG foi melhor adaptada para o casos em que o tamanho viga era menores (*D*=0,063 m). Distribuições de valor extremo são comumente associadas a modelagem de problemas com probabilidades muito pequenas ou eventos raros.

6.1 CONCLUSÕES

Esta pesquisa implementou com sucesso um algoritmo iterativo para o cálculo do índice β, para funções de estados limites não lineares. O algoritmo mostrou bom desempenho e convergência para todos os cenários analisados. Os resultados mostraram que a análise determinística do concreto utilizando parâmetros de fratura extraídos de ensaios com as metodologias EEB e MDP são similares para a predição do efeito de escala da resistência nominal de vigas elaboras em os materiais CONC e FRAP. Entretanto, as predições dos índices de confiabilidade considerando as incertezas dos parâmetros do material, geometria e carregamento foram bastante distintas para cada um dos modelos.

As confiabilidades determinadas com parâmetros do EEB foram bem mais conservadoras (menor valor de β) para os diversos tamanhos de trinca α e espessuras de viga *D* quando comparados com as predições de confiabilidade a partir dos parâmetros de MDP. Além disso, este último mostrou uma grande variação de β para a variação de α e *D* considerados. Isto é explicado principalmente pelo mais alto CV do parâmetro *C* quando determinados pelo MDP. Este alto CV é atribuído a grande incerteza de *C* que é calculado indiretamente por várias equações não lineares e em medidas de inclinações de curvas de histeresis em ensaios do material. Enquanto que *C*, no modelo EEB, é calculado baseado em medidas de carregamentos máximos em vigas de tamanhos diferentes que tendem a ter menor variação em suas medidas.

As análises apresentadas também mostram a existência de um efeito de escala na tendência do índice de confiabilidade, em que estruturas maiores (maior *D*) tem maior probabilidade de falha. Além do mais, a variabilidade do parâmetro *C* é a que mais afeta esse efeito de escala de β. Este trabalho também demonstrou quantitativamente que a escolha do modelo, e as metodologias experimentais associadas a ele, contribui de maneira significativa para a determinação da confiabilidade estrutural. Além disso, os resultados aqui mostram que a consideração da variabilidade estatísticas destes parâmetros do material associados as incertezas do carregamento e geometria da peça são essenciais para a adequada predição de falha estrutural.

O conhecimento de os índices de confiabilidade, probabilidades de falha e incidência dos parâmetros do concreto para variação geometria da viga de FTP com fraturamento tipo I que é um tipo de falha muito comum, servirá aos calculistas como guia nos projetos de dimensionamento estrutural considerando a mecânica da fratura. Com a utilização de diferentes coeficientes de segurança (F_S) na equação de estado limite para o EEB, MFLE e MDP foi possível concluir que para maiores fatores de segurança obtém-se maiores índices de confiabilidade é dizer que estão relacionado de maneira direita. Ao estabelecer comparações entre os dois materiais estudados, o CONC e o FRAP com a avalição do método de confiabilidade, determinou-se que os dos apresentarem gráficos com as

mesmas tendências e com a mesma incidência do efeito de escala, as únicas diferencias que encontraram-se estavam em relação que para o CONC os índices β e a resistência resultarem maiores que para o FRAP.

As simulações do MMC por meio da geração de números aleatórios permitiu conhecer as distribuições que apresentavam as variáveis que usadas nos modelos EEB e MDP descrevendo o comportamento probabilístico da resistência para o material CONC. As FDP de do EEB apresentarem uma predominância da distribuição t-Student, e no caso do MDP, predominou a distribuição normal e lognormal.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar:

- determinação do índice de confiabilidade para outras estruturas e condições de carregamentos: placas planas, punção em lajes e outras condições;
- estudo o efeito do CV de G_f e C no valor do índice de confiabilidade para vários tamanhos;
- formulação de outras equações de estado limite para fratura de estruturas de concreto;
- consideração outros tipos de distribuição para as variáveis geométricas da viga além das distribuições normais e lognormais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI Committee 440., 2006. Guide for the design and construction of structural concrete reinforced with FRP bars (ACI 440.1R-06)., Farmington Hills, Michigan., American Concrete Institute.

Ang, A.H.S., and Tang, W.H., 1975. Probability Concept in Engineering Planning and Design, Vol. I, John Wileyand Sons, NY.

Arana, J.L., y Gonzales., J.J., 2002. Mecanica de fratura., Universidad del Pais Vasco, primera edición.

Arora, J.S., 2004. Introduction to Optimum Design., Elsevier Academic Press, London, UK.

Associação Brasileira de normas técnicas., 2003. Ações e segurança nas estruturas – procedimento. – NBR8681, Rio de Janeiro.

Bazant e Jayme Planas. 1997. “Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials” por CRC Press.

Bazant, Z.P., 2002. Concrete Fracture Models: Testing and Practice, Engineering Fracture Mechanics., 29 , pp. 165-205.

Bazant, Z.P., 2005. Scaling of Structural Strength. Second edition, Elsevier.

Bazant, Z. P., and Becq-Giraudon, E., 2002. Statistical Prediction of Fracture Parameters of Concrete and Implications for Choice of Testing Standard. Cement and Concrete Research, 32, pp. 529-556.

Bazant, Z.P., and Kazemi, M.T.,1990. Determination of Fracture Energy, Process Zone Length and Brittleness Number from Size Effect, with Application to Rock and Concrete. International Journal of Fracture, 44(2), pp. 111–131

Bazant, Z.P., Choi, S., Canfield, R.A., and Grandhi, R.V., 2005. Estimation of Structural Reliability for Gaussian Random Fields. Structure and Infrastructure engineering.

Beck., A. T., and Melchers, R.E., 2004. Overload Failure of Structural Components under Random Crack Propagation and Loading - A Random Process Approach. Structural Safety., JRC., Elsevier, Vol. 26, pp., 471-488.

Bilal, M., and Richard, H.,2011. Probability, Statistics, and Reliability for Engineers and Scientists., third edition.

Brand, A., Amirkhanian, A and Roesler, J., 2013. Flexural Capacity of Rigid Pavement Concrete Slabs with Recycled Aggregates.

Choi, S., Canfield, R.A, and Grandhi, R.V., 2005. “Estimation of Structural Reliability for Gaussian Random Fields,” Structure and Infrastructure engineering.

Cornell, C.A., 1967. “Bounds on the Reliability of Structural Systems,” Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 93 (1).

Evangelista, Jr, F., Roesler, J., and Duarte, C., 2013. Two-Scale Approach to Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures Uing the Generalized Finite Element Method. International Journal of Solids and Structures., Vol. 50., pp. 1991-2002.

Evangelista, Jr, F., e, Peña., I., 2014. Avaliação numérica do risco de falha estrutural por propagação de trincas em estruturas e materiais quasi-frágeis In: XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE).

Fréchet, M., 1927. “Sur la loi de probabilité de l’écart maximum.” Ann. Soc. Polon. Math. 6, 93.

Griffith, A., 1921. “Philosophical transactions of the Royal Society of London”; Series A., Contains papers of a mathematical or physical character.

Haldar, A., and Mahadevan, S., 2000. Reliability assessment using stochastic finite element analysis. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.

Hasofer, A.M., and Lind, N.C., 1974. “Exact and Invariant Secon-Moment Code Format,”Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 100(EM), pp.111-121.

Hohenbichler, M., and Rackwitz, R., 1981. “Non-normal Dependent Vectors in StructuralSafety,” Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, No. EM6, pp.1227-1238.

Hernandez, H., e Mora E., 2002. “Mecânica de fratura e analises de falha”., Primera edição ISBN., Universidad Nacional de Colombia.

Irwin, G.R., 1961. Plastic Zone Near a Crack and Fracture and Toughness. Sagamore Research Conference Proceedings, Vol. 4.

Irwin, G.R., Paris, C.P., & Tada, H., 2000. “The stress analysis of cracks handbook”., third edition.

Jenq, Y.S., and Shah, S.P., 1985. Two Parameter Fracture Model for Concrete. Journal of Engineering Mechanics, 10 pp. 1227-1241.

Johnson, N., Kotz, S., and Balakrishnan, N., 1994. Continuous Univariate Distributions, Vol.1, Wiley, NY.

Li, Z., 2011. Advanced Concrete Technology. New Jersey.

Melchers, R., 1999. Structural Reliability Analysis and Prediction.,. second edition, Wiley and Sons.

Mehta, P., & Monteiro, P. J. M., 2006. Concrete: Microstructure, Properties, and Materials., third edition, McGraw-Hill.

Mindess, S., Young, J. F., & Darwin, D., 2003. Concrete., second edition. Prentice Hall

Martinez, J., 2004. “Mecánica de fractura probabilística aplicada al problema de inspección de servicio”., Tesis doctoral., Instituto Politécnico Nacional.

Melchers, R.E., 1987. Structural Reliability Analysis and Prediction., Ellis Horwood Limited., UK.

Nowak, A., and Collins, K., 2013. Reliability of structures., Second edition., Crc press., boca raton., Fl.

Paliga, C.M., Campos Filho, A., Real, M.V. and Diniz, Sofia M. C., 2011 . “Métodos de análise de confiabilidade aplicados a vigas de concreto armado recuperadas com PRFC”., Teoria e Prática na Engenharia Civil (Online), Vol. 17., pp. 57-66.

Por Zongjin Li., 2011. “Advanced Concrete Technology”, New Jersey.

Ribeiro, S. E. C., and Diniz, S.M.C., 2013. “Reliability-based design recommendations for FRP-reinforced concrete beams”., Engineering Structures., JRC, Vol. 52., pp. 273-283.

RILEM., 1990a. Size-effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete, Mater. Struct. 23, 461–465, (RILEM Draft Recommendation, TC 89-FMT Fracture Mechanics of Concrete—Test Methods).

RILEM., 1990b. Determination of fracture parameters (KIc and CTDO) of plain concrete using three-point bend tests on beams, Mater. Struct. 23, 457–460, (RILEM Draft Recommendation, TC 89-FMT Fracture Mechanics of Concrete—Test Methods).

Rosa, E., 2002. “Analise de resistência mecânica”.,Grante, Universidade Federal de Santa Catarina.

Seung-Kyum Choi, Ramana V. Grandhi e Robert A. Canfield., 2007, “Reliability-based Structural Design”.

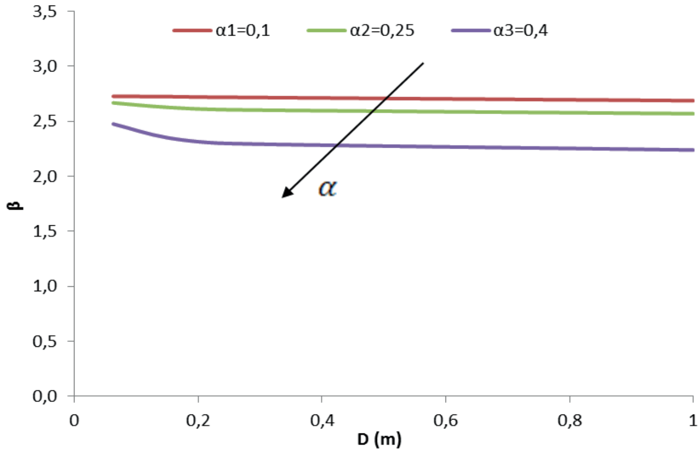
Silva, J.L., El Debs, M.K., and Beck, A. T., 2008. “Reliability Evaluation of Reinforced Concrete Pipes in Crack Opening Limit State”., Revista IBRACON de Estruturas e Materiais., Vol. 1., pp. 314-330.

Walpole, R, et al, 2012, “Probabilidad y Estadística para Ingenieria y Ciencias”., novena edición, Mexico.

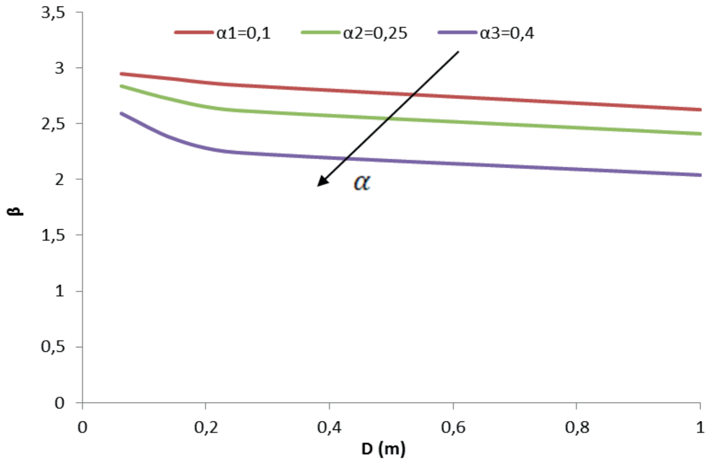
ANEXOS

A. ÍNDICES DE CONFIABILIDADE.

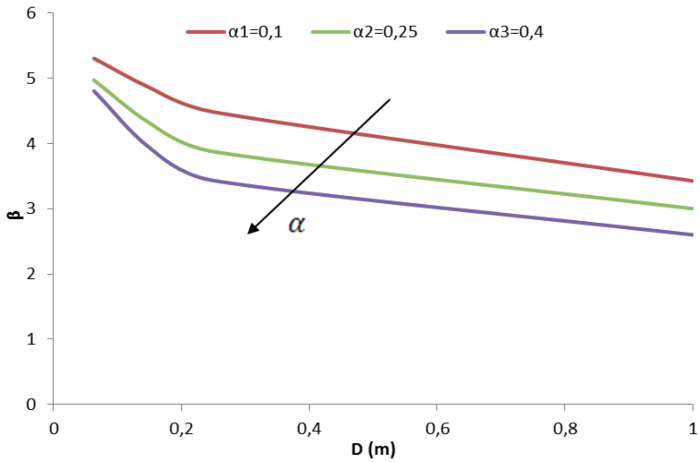
Analise de confiabilidade para F_s = 1,5 e F_s = 2,0 concreto virgem, índices β para distribuições normais e lognormais caso I e caso II, para material CONC.



(a) EEB

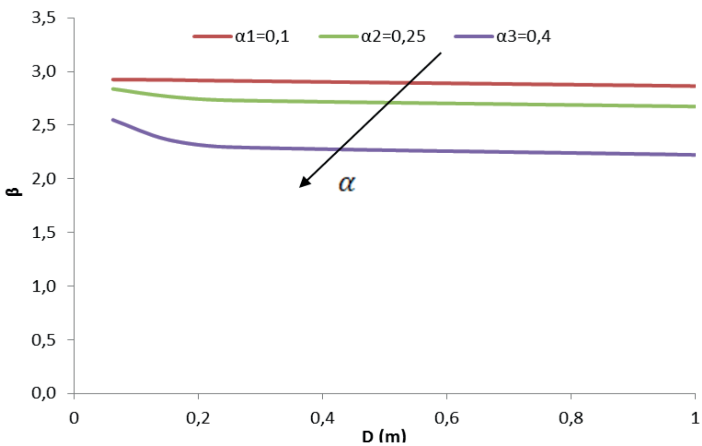


(c) MDP

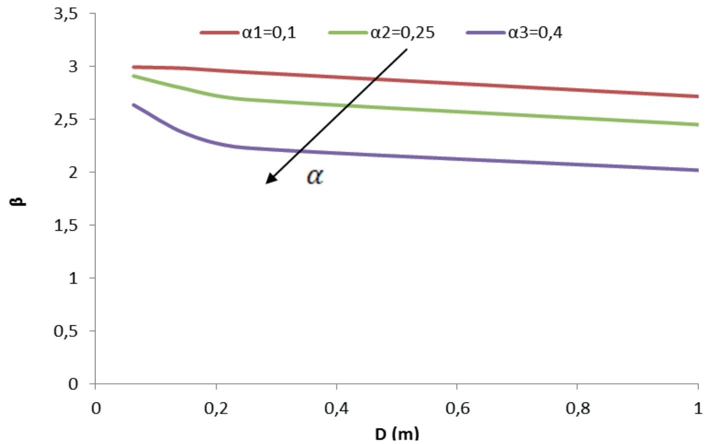


(c) MFLE

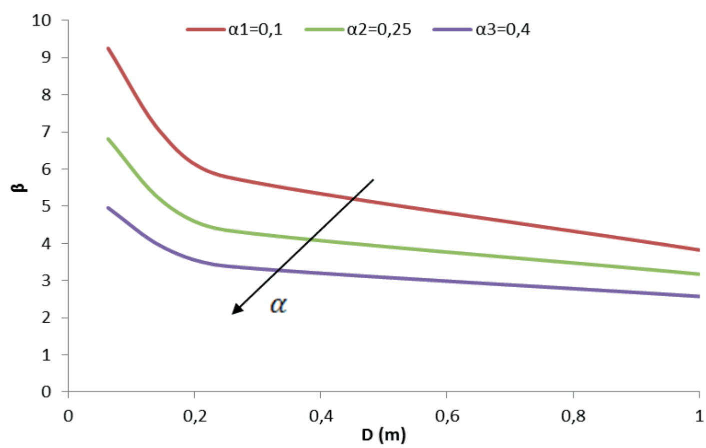
Figura A.1. Predição do índice de confiabilidade β para material CONC, com F_s = 1,5 e caso I: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE.



(a) EEB

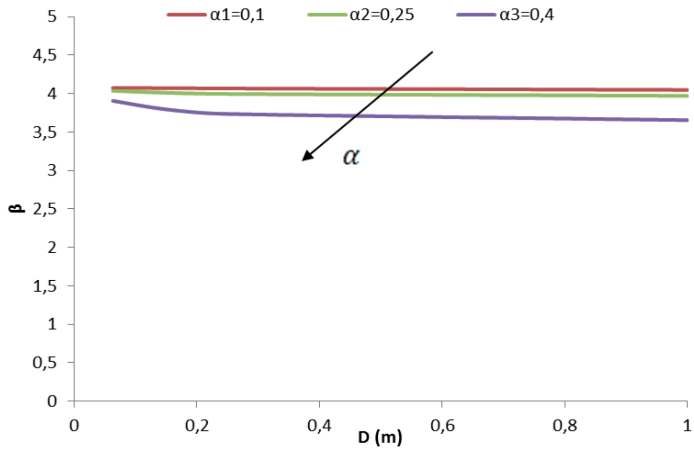


(b) MDP

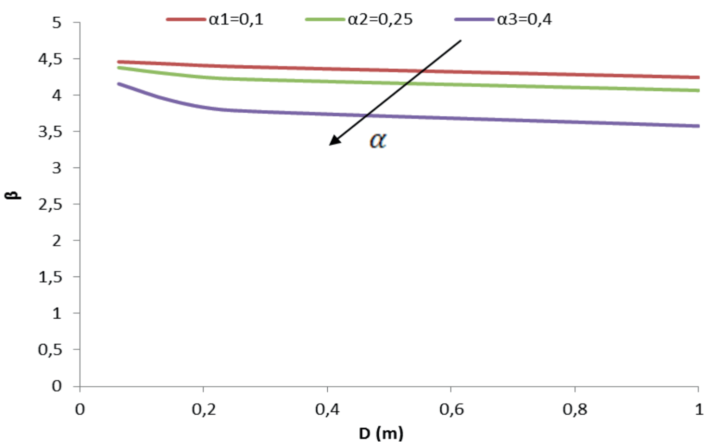


(c) MFLE

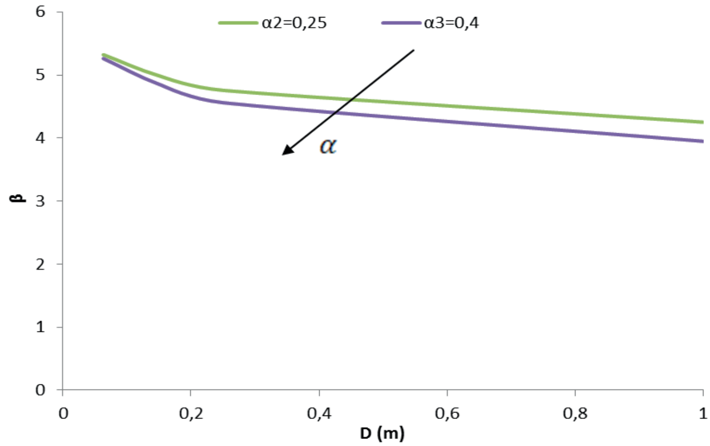
Figura A.2. Predição do índice de confiabilidade β para material CONC, com F_S = 1,5 e caso II: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE


α1=0,1
α2=0,25
α3=0,4
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
β
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
D (m)
α

(a) EEB

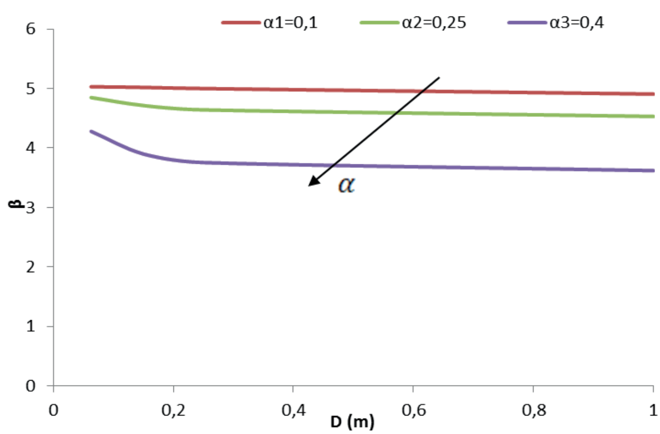

α1=0,1
α2=0,25
α3=0,4
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
β
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
D (m)
α

(b) MDP

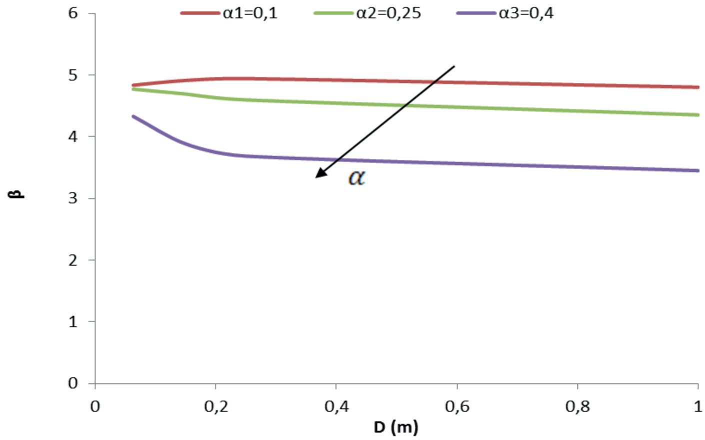


(c)MFLE

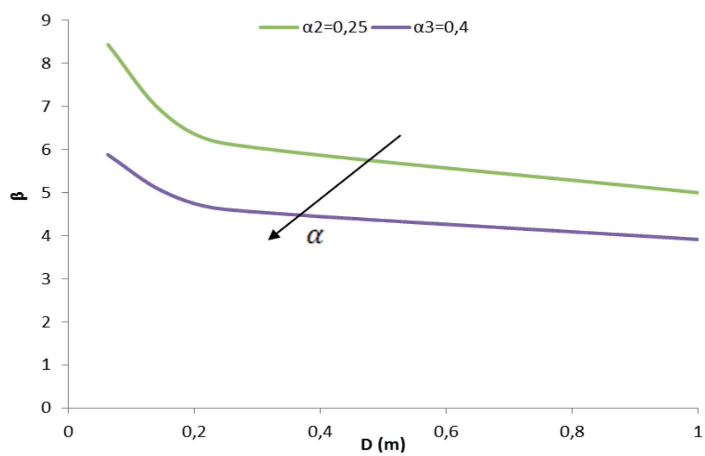
Figura A.3. Predição do índice de confiabilidade β para CONC, com F_S = 2,0 e caso I: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE



(a) EEB



(b) MDP

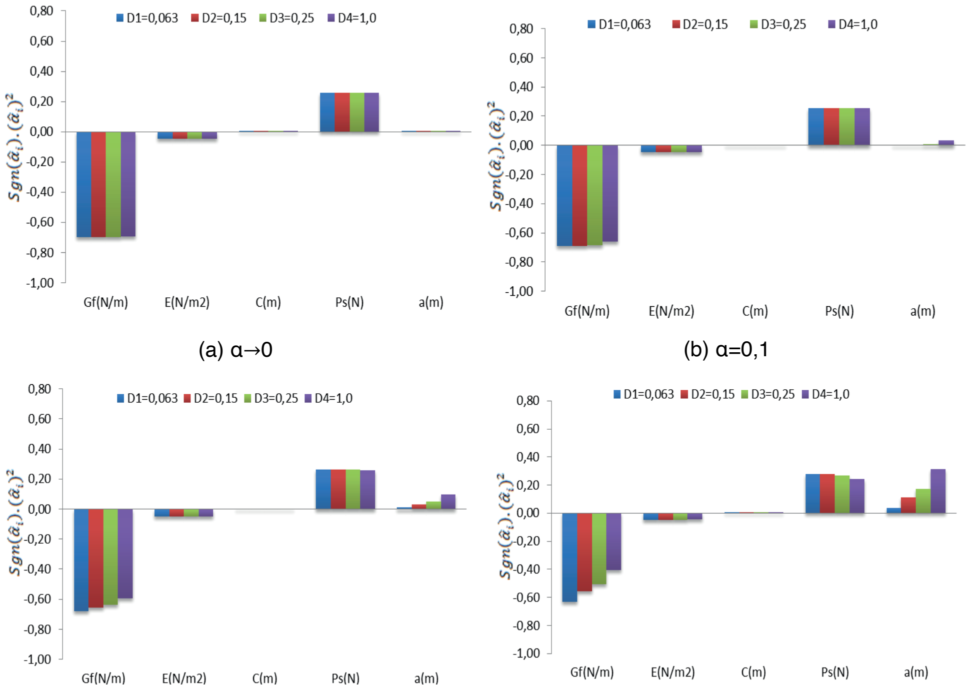


(c) MFLE

Figura A.4. Predição do índice de confiabilidade β para material CONC, com F_S = 2,0 e caso II: (a) EEB; (b) MDP e (c) MFLE

B. ÍNDICES DE SENSIBILIDADE

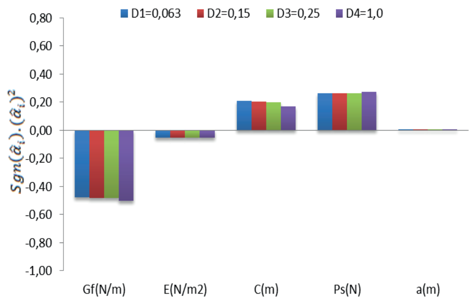
Analise de confiabilidade para F_s = 1,5 e F_s = 2,0, cossenos $\hat{\alpha}_i$ para distribuições normais e lognormais caso I e caso II, para material CONC.



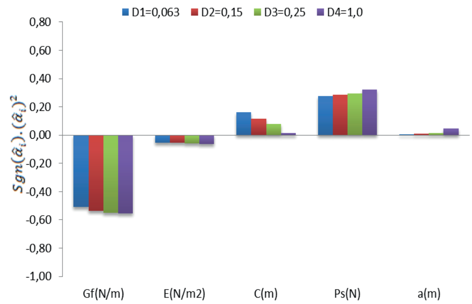
(a) α→0 (b) α=0,1

(c) α=0,25 (d) α=0,4

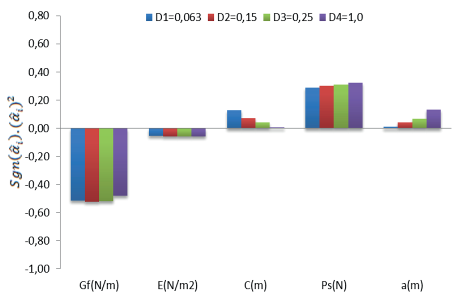
Figura B.1. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo EEB, com F_s = 1,5 e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



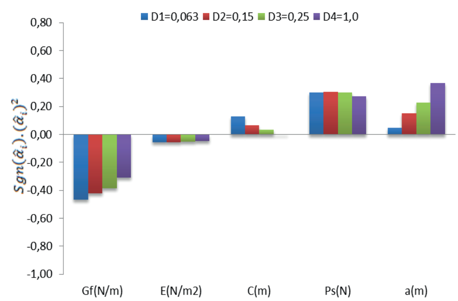
(a) α→0



(b) α=0,1

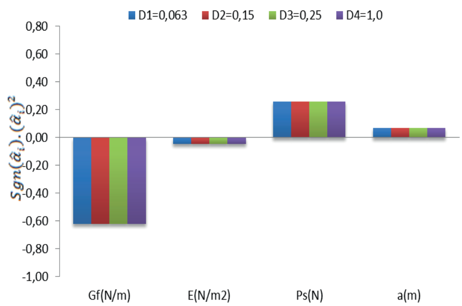


(c) α=0,25

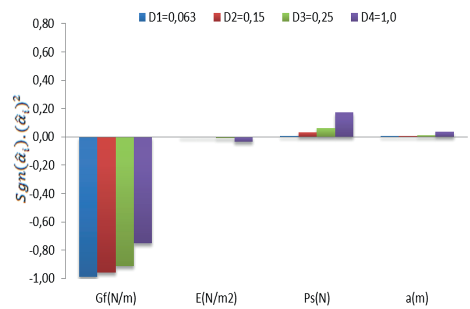


(d) α=0,4

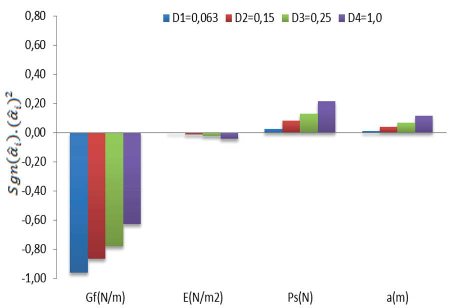
Figura B.2. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MDP, com F_s = 1,5 o caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



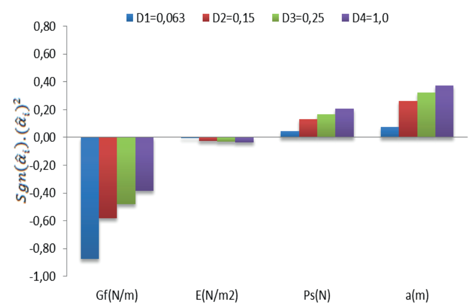
(a) α→0



(b) α=0,1

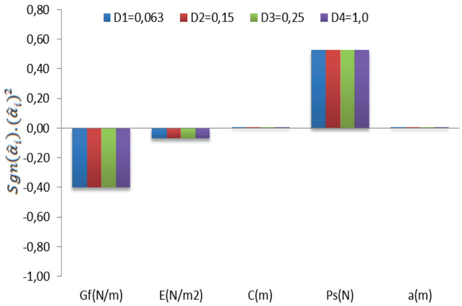


(c) α=0,25

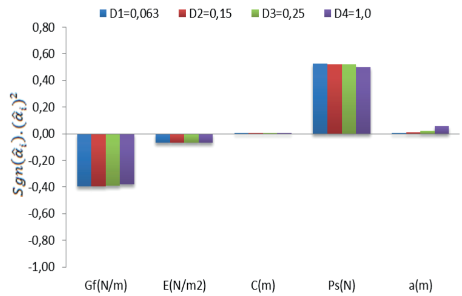


(d) α=0,4

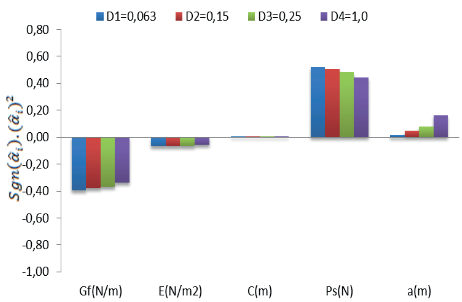
Figura B.3. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MFLE, com F_S = 1,5 e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



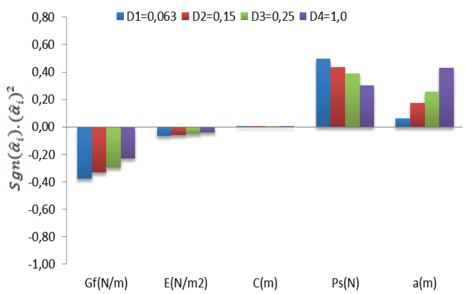
(a) α→0,0



(b) α=0,1

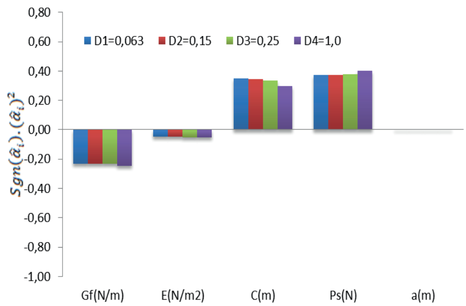


(c) α=0,25

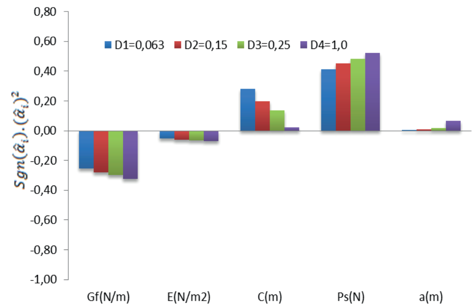


(d) α=0,4

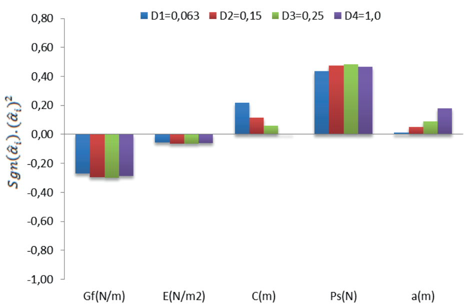
Figura B.4. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo EEB, com F_s = 1,5 e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



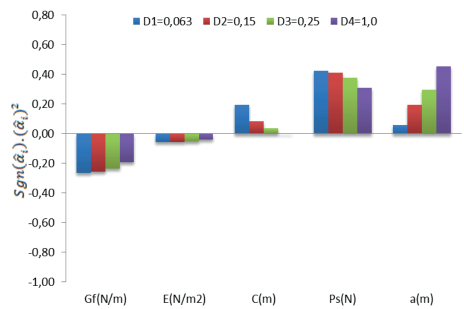
(a) α→0



(b) α=0,1

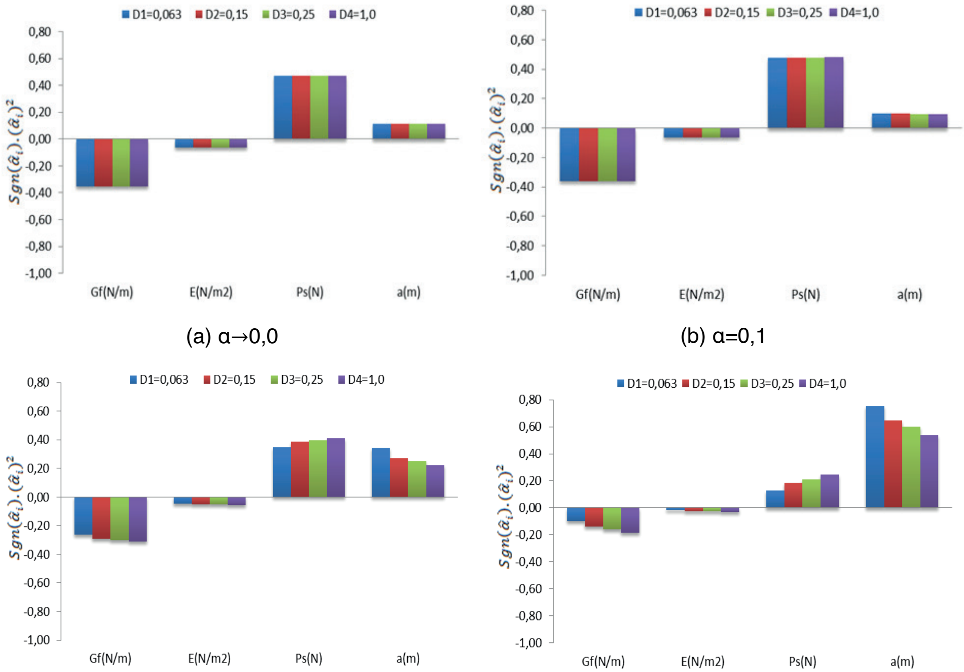


(c) α=0,25



(d) α=0,4

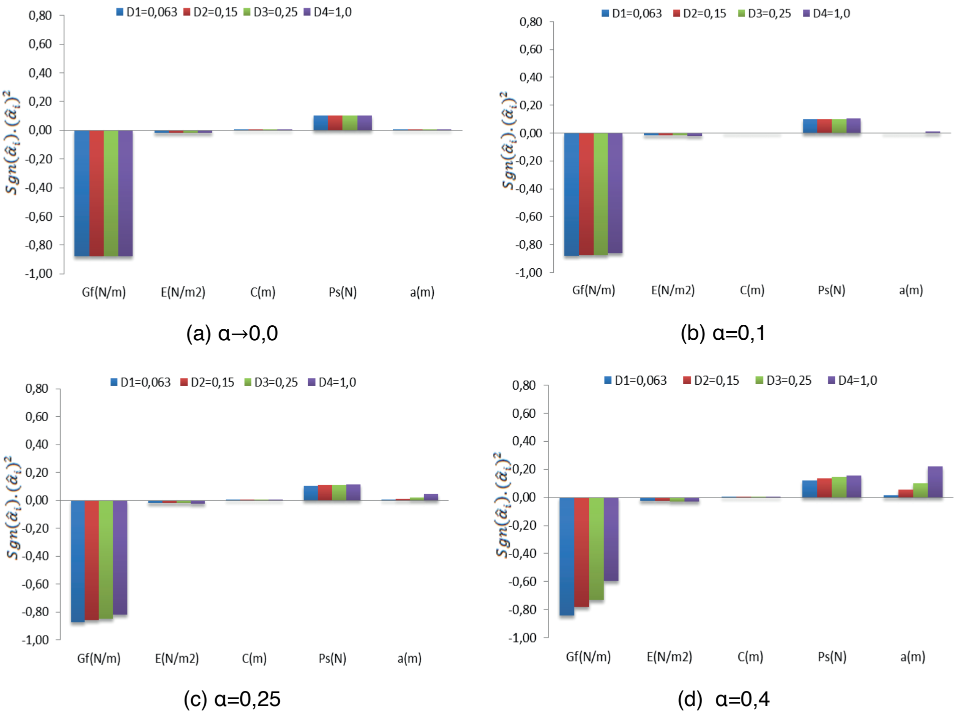
Figura B.5. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MDP, com $F_S = 1{,}5$ e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



(a) α→0,0 (b) α=0,1

(c) α=0,25 (d) α=0,4

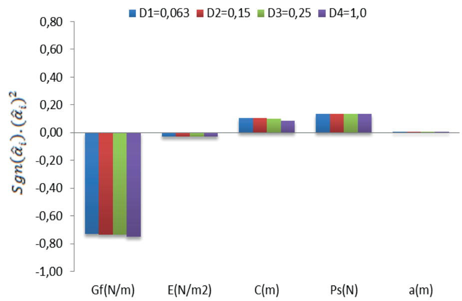
Figura B.6. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MFLE, com F_s = 1,5 o caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



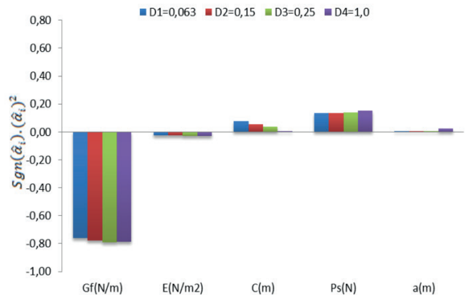
(a) α→0,0 (b) α=0,1

(c) α=0,25 (d) α=0,4

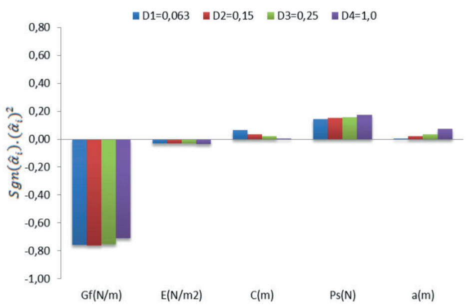
Figura B.7. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo EEB, com F_S = 2,0 e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



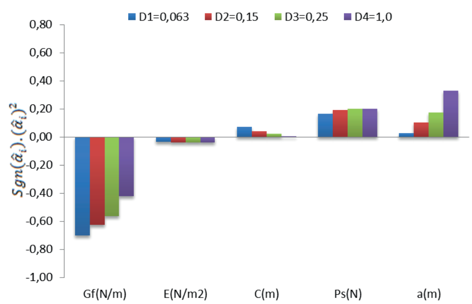
(a) α→0,0



(b) α=0,1

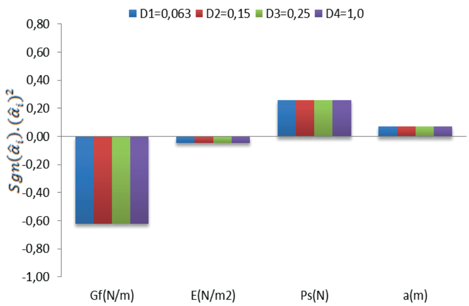


(c) α=0,25

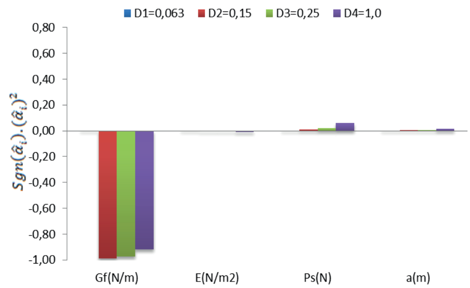


(d) α=0,4

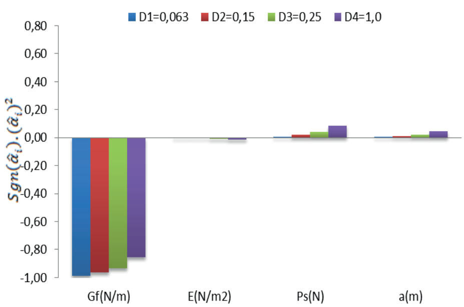
Figura B.8. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MDP, com F_S = 2,0 e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



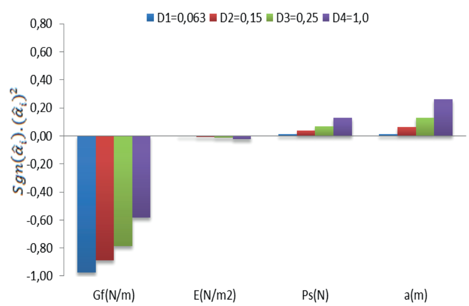
(a) α→0,0



(b) α=0,1

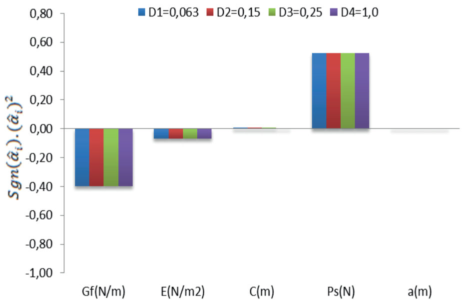


α=0,25 (c)

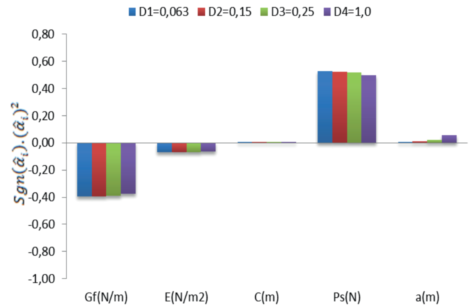


α=0,4 (d)

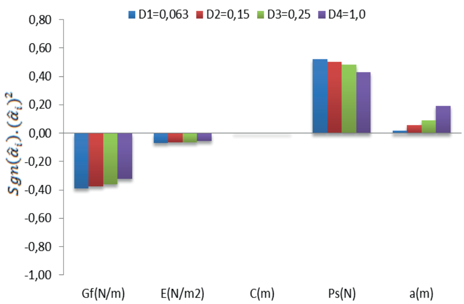
Figura B.9. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MFLE, com F_s = 2,0 e caso I: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.



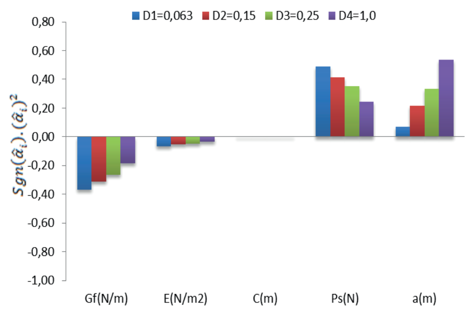
(a) α→0,0



(b) α=0,1

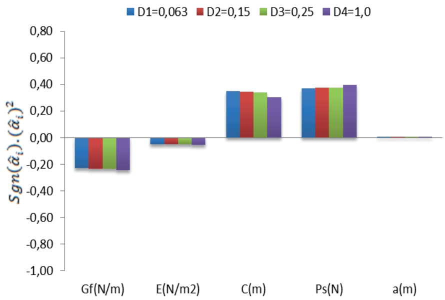


(c) α=0,25

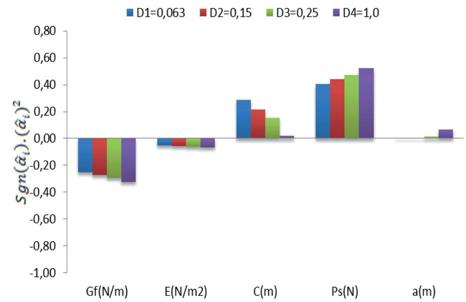


(d) α=0,4

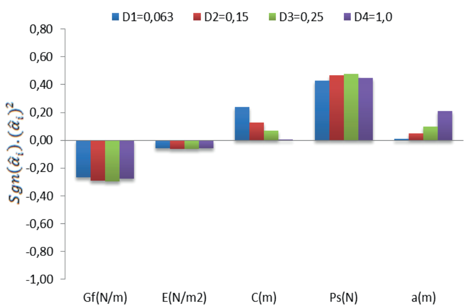
Figura B.10. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo EEB, com $F_s = 2,0$ e caso II: (a) α→0; (b) α=0.1; (c) α=0.25 e (d) α=0.4.



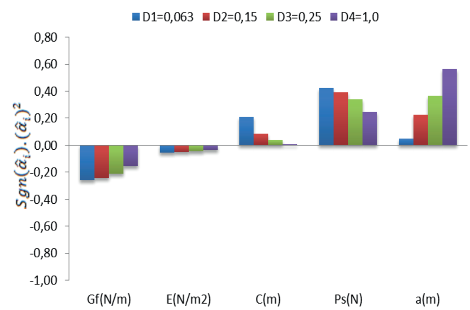
(a) α→0,0



(b) α=0,1

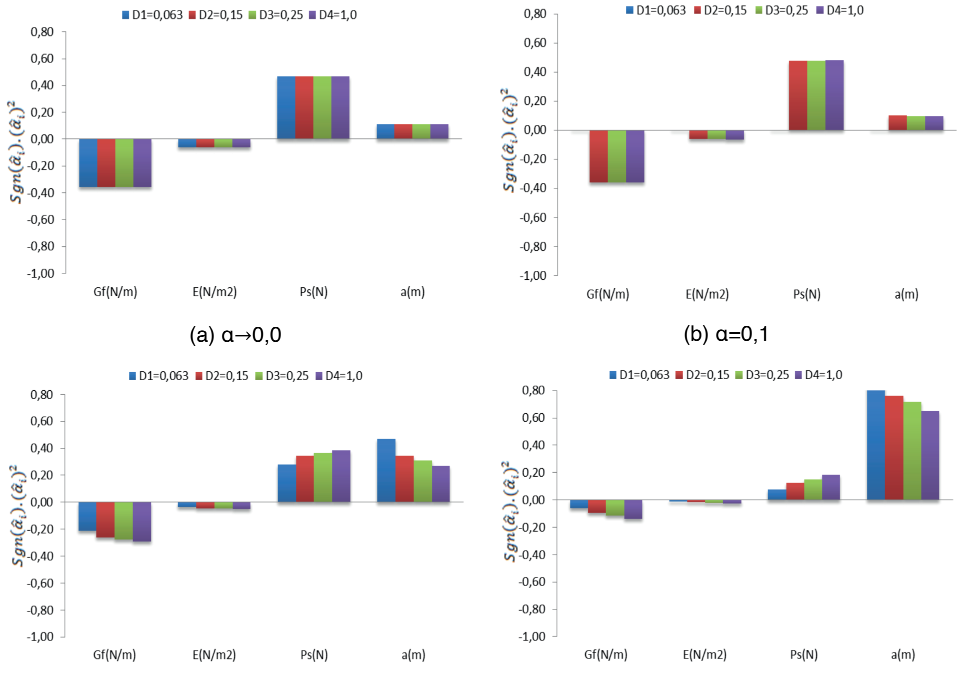


(c) α=0,25



(d) α=0,4

Figura B.11. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MDP, com $F_s = 2,0$ e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0.4.



(a) α→0,0 (b) α=0,1

(c) α=0,25 (d) α=0,4

Figura B.12. Índices de sensibilidade das variáveis aleatórias $\hat{\alpha}_i$ para material CONC, modelo MFLE, com FS = 2,0 e caso II: (a) α→0; (b) α=0,1; (c) α=0,25 e (d) α=0,4.

C. FATORES DE SEGURANÇA

Tabelas para os F_s = 1,1; 1,5 e 2,0 para CONC e F_s = 1,1 para FRAP

Tabela C.1. Índices de confiabilidade β com F_S = 1,1 para CONC e FRAP e caso II.

Fs = 1,1			*CONC*						*FRAP*			
	EEB		MDP		MFLE		EEB		MDP		MFLE	
D(m)	β	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β	α
0,063	0,6671	0,00	1,0816	0,00	N.C	0,00	0,3560	0,00	0,8444	0,00	N.C	0,00
0,15	0,6673		1,0750		-		0,3561		0,8386		-	
0,25	0,6676		1,0675		-		0,3562		0,8320		-	
1,00	0,6688		1,0129		-		0,3570		0,7834		-	
0,063	0,6686	0,10	0,9881	0,10	7,1029	0,10	0,3566	0,10	0,7604	0,10	7,1029	0,10
0,15	0,6695		0,8748		4,7697		0,3579		0,6515		4,7697	
0,25	0,6689		0,7736		3,6397		0,3587		0,5459		3,6397	
1,00	0,6617		0,4634		1,6705		0,3597		0,1697		1,6705	
0,063	0,6611	0,25	0,8913	0,25	4,9224	0,25	0,3634	0,25	0,6848	0,25	4,9224	0,25
0,15	0,6479		0,7139		3,1545		0,3605		0,5056		3,1545	
0,25	0,6409		0,5951		2,3686		0,3588		0,3665		2,3686	
1,00	0,6298		0,3482		1,1582		0,3557		0,0339		1,1582	
0,063	0,6144	0,40	0,8045	0,40	3,7104	0,40	0,3613	0,40	0,6515	0,40	3,7104	0,40
0,15	0,5788		0,6102		2,4469		0,3498		0,4556		2,4469	
0,25	0,5649		0,5006		1,8618		0,3441		0,3192		1,8618	
1,00	0,5502		0,2982		0,9491		0,3367		0,0241		0,9491	

Tabela C.2. Índices de confiabilidade β com $F_S = 1{,}5$ para CONC e caso II.

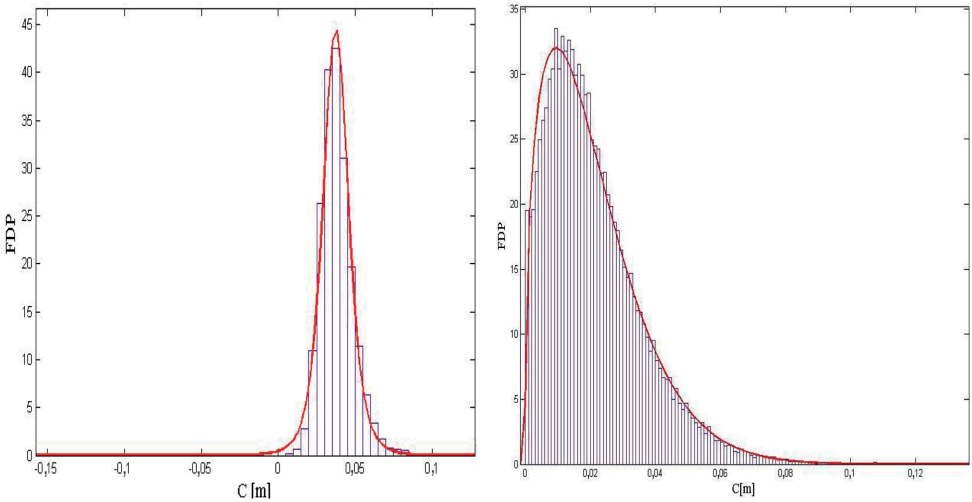
$F_s = 1{,}5$	*CONC*					
	EEB		MDP		MFLE	
D(m)	β	α	β	α	β	α
0,063	2,9299	0,00	2,9797	0,00	N.C	0,00
0,15	2,9302		2,9813		-	
0,25	2,9304		2,9829		-	
1,00	2,9304		2,9902		-	
0,063	2,9262	0,10	2,9927	0,10	9,2525	0,10
0,15	2,9228		2,9803		6,9221	
0,25	2,9141		2,9446		5,7932	
1,00	2,8654		2,7154		3,8254	
0,063	2,8383	0,25	2,9085	0,25	6,8136	0,25
0,15	2,7697		2,7865		5,1199	
0,25	2,7326		2,6863		4,3570	
1,00	2,6745		2,4498		3,1748	
0,063	2,5498	0,40	2,6353	0,40	4,9584	0,4
0,15	2,3675		2,3636		3,9004	
0,25	2,2966		2,2295		3,3907	
1,00	2,2240		2,0183		2,5751	

Tabela C.3. Índices de confiabilidade β com $F_S = 2{,}0$ para CONC e caso II

$F_s = 2{,}0$	*CONC*					
	EEB		MDP		MFLE	
D(m)	β	α	β	α	β	α
0,063	5,0287	0,00	4,7391	0,00	N.C	0,00
0,15	5,0291		4,7469		N.C	
0,25	5,0293		4,7556		-	
1,00	5,0281		4,8117		-	
0,063	5,0309	0,10	4,8360	0,10	N.C	0,10
0,15	5,0193		4,9130		-	
0,25	5,0000		4,9430		-	
1,00	4,9073		4,8027		-	
0,063	4,8490	0,25	4,7719	0,25	8,4383	0,25
0,15	4,7155		4,6928		6,8678	
0,25	4,6422		4,5974		6,1404	
1,00	4,5303		4,3540		4,9995	
0,063	4,2799	0,40	4,3303	0,40	5,8795	0,4
0,15	3,8998		3,8844		5,0332	
0,25	3,7555		3,6859		4,6107	
1,00	3,6196		3,4500		3,9143	

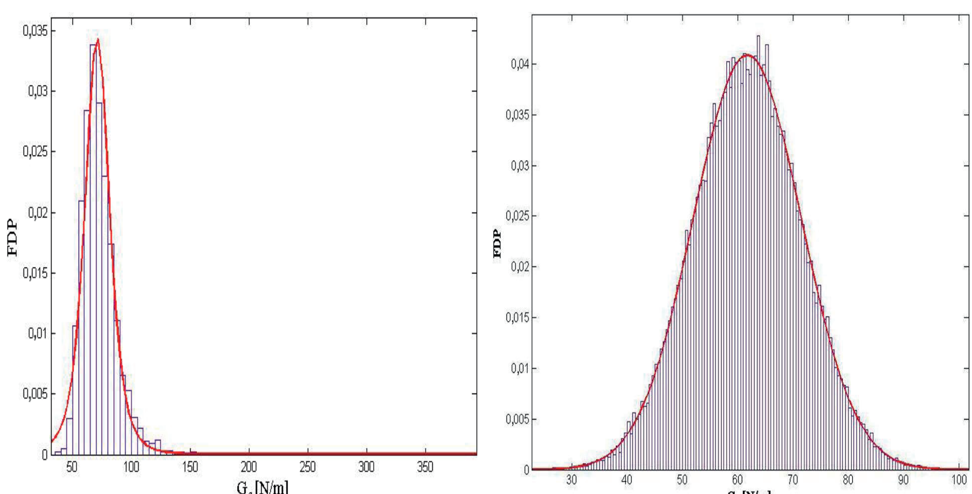
D. PARÂMETROS SIMULADOS POR MONTECARLO

Testes de aderência realizados para os parâmetros *C*, *CTMOD* e G_f e para as os diferentes combinações geométricas de α (0,05; 0,1; 0,40) e *D* (0,063; 0,15; 0,50; 1,0 m) realizados para as distribuições geradas pelo MMC para material CONC.



(a) EEB (b) MDP

Figura D.1. Função densidade de probabilidade (FDP) do parâmetro *C* para os modelos: a) EEB (distribuição t-student) e b) MDP (distribuição Weibull).



(a) EEB (b) MDP

Figura D.2. Função densidade de probabilidade (FDP) do parâmetro G_f para modelos: a) EEB (distribuição t-student) e b) MDP (distribuição normal).

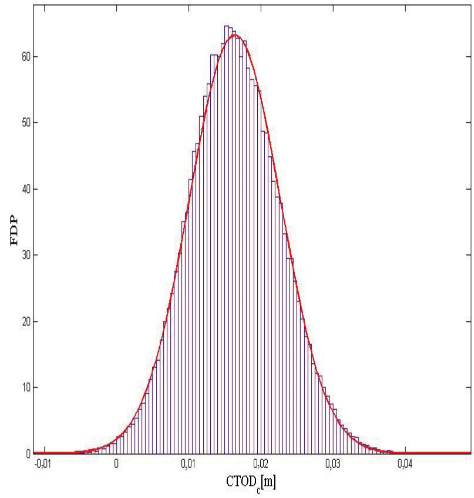
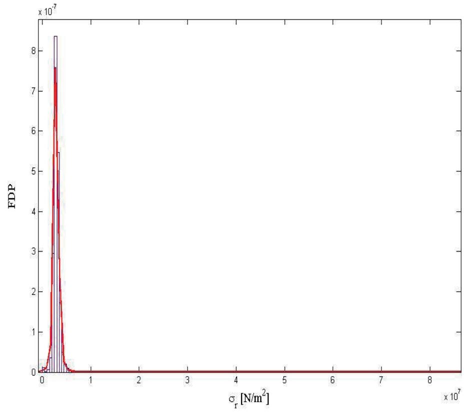
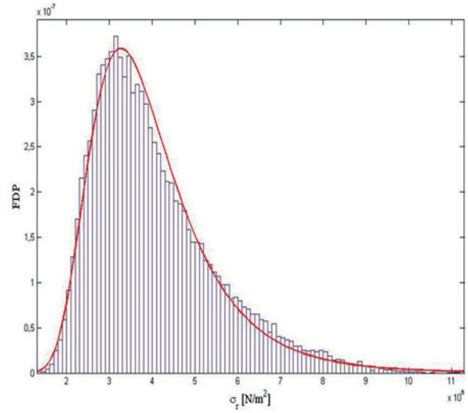


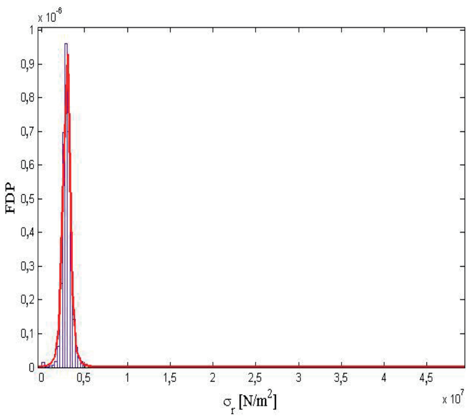
Figura D.3. Função densidade de probabilidade (FDP) do parâmetro $CTOD_c$ para o MDP (distribuição normal).



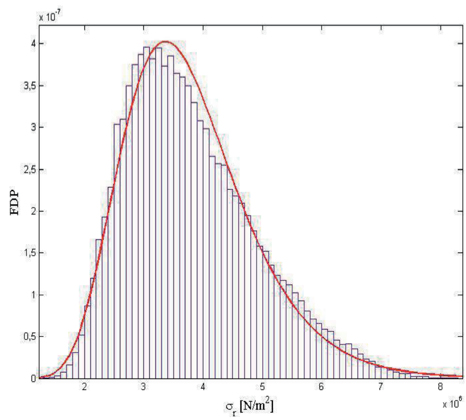
α = 0,05



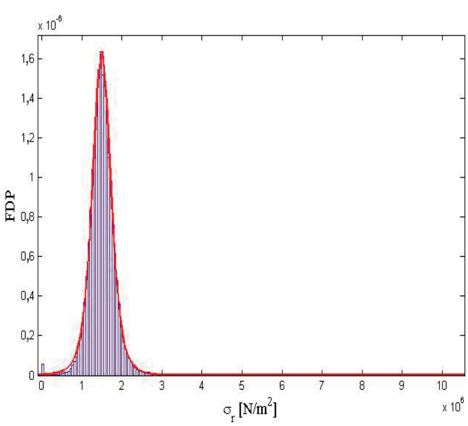
(b) α =0,05



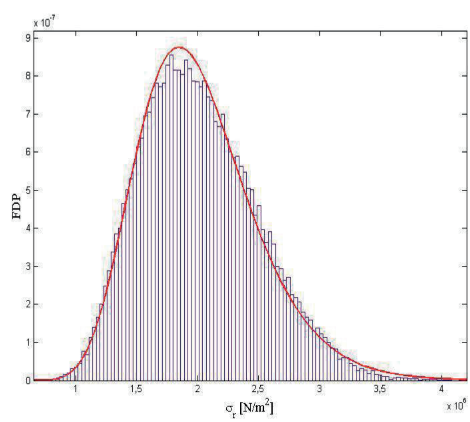
(c) α=0,1



(d) α=0,1

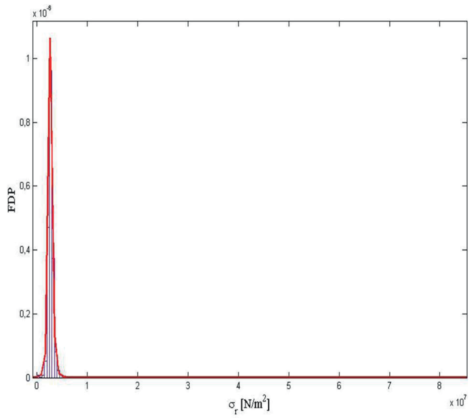


(e) α=0,4

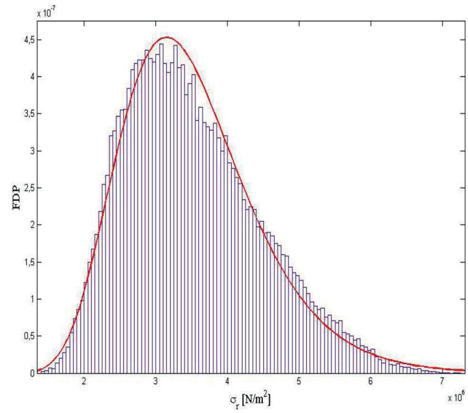


(f) α=0,4

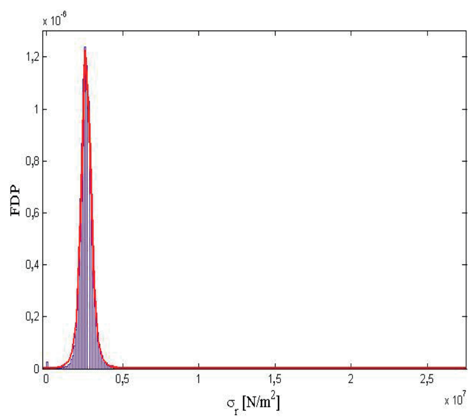
Figura D.4. Parâmetro com *D*=0,063m com α =0,05, α=0,1 e α=0,40: para EEB a),e) e f) distribuição T-Student e para MDP: c) valor extremo generalizado d) e f) Lognormal.



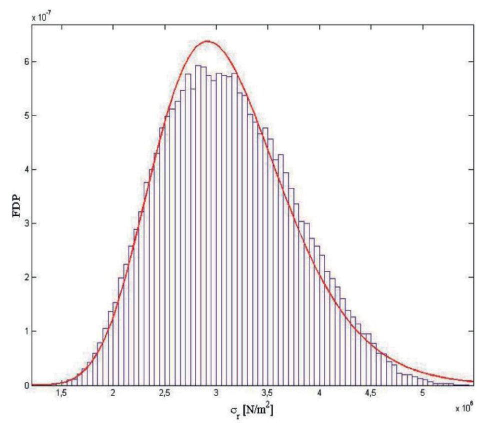
(a) α=0,05



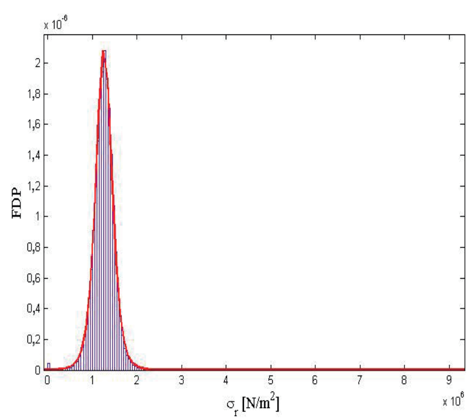
(b) α=0,05



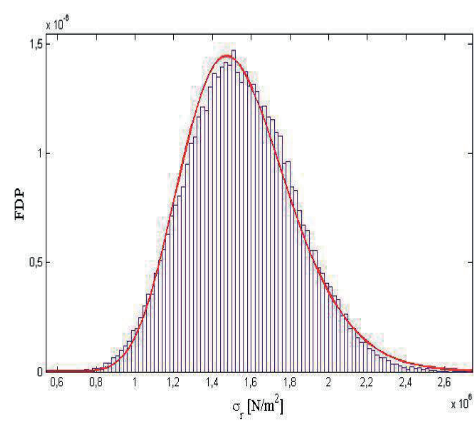
(c) α=0,10



(d) α=0,10

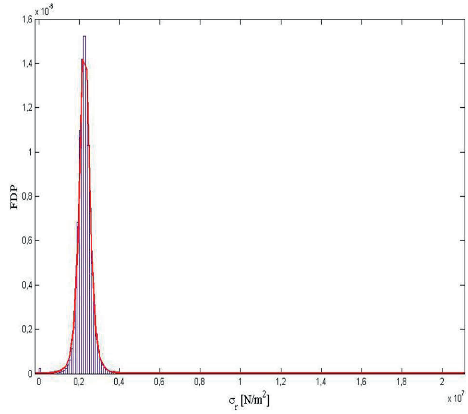


(e) α=0,40

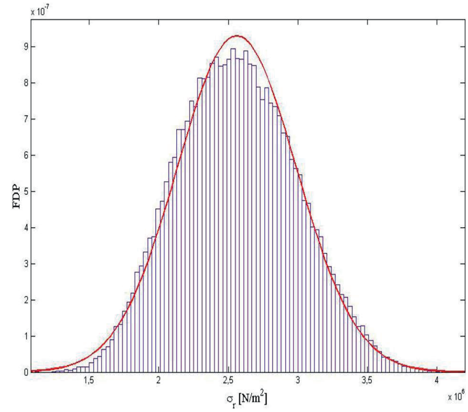


(f) α=0,40

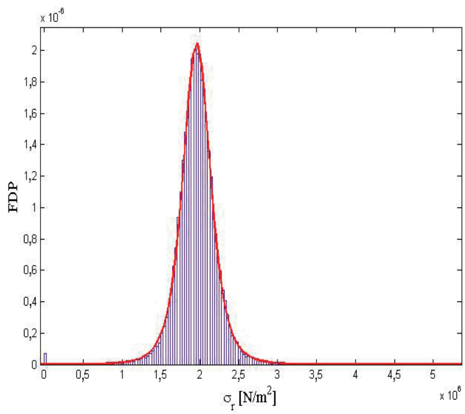
Figura D.5. Parâmetro σ_r para *D*=0,15 m com α =0,05, α=0,1 e α=0,40: para EEB a), e) e f) distribuição t-student e para MDP: c), d) e f) Lognormal.



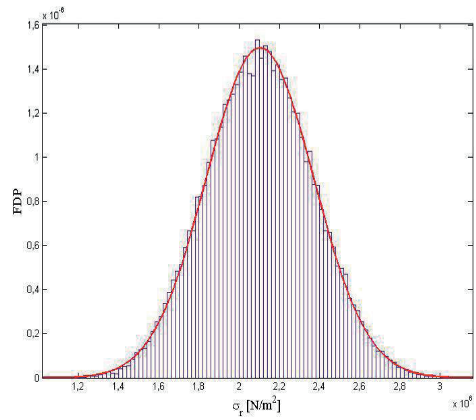
(a) α=0,05



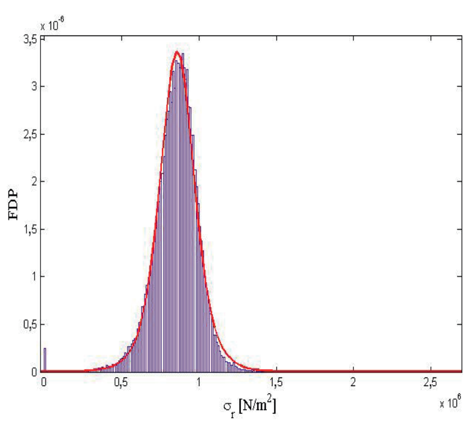
(b) α=0,05



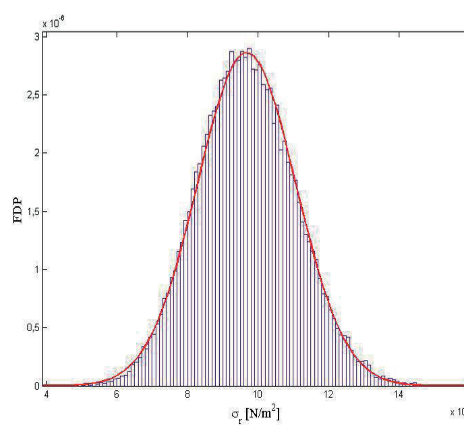
(c) α=0,10



(d) α=0,10

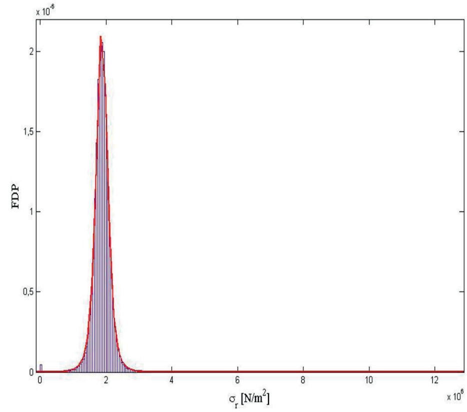


(e) α=0,40

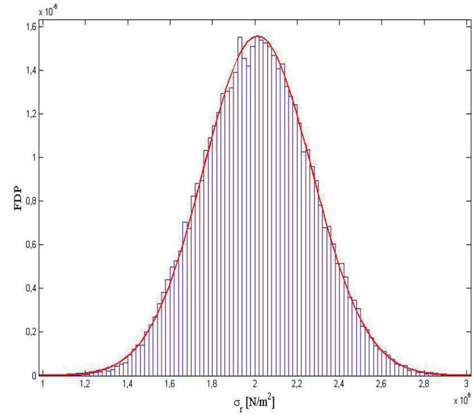


(f) α=0,40

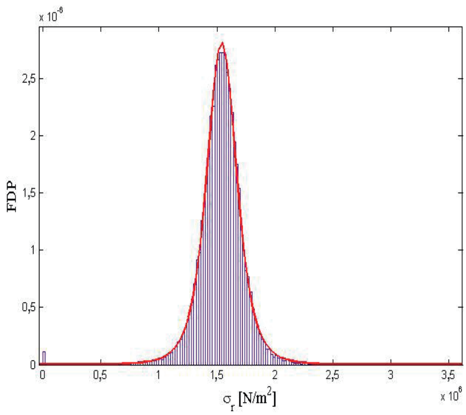
Figura D.6. Parâmetro σ_r para *D* =0,5 m com α =0,05, α=0,1 e α=0,40: para EEB a), e) e f) distribuição t-student e para MDP: c), d) e f) Normal.



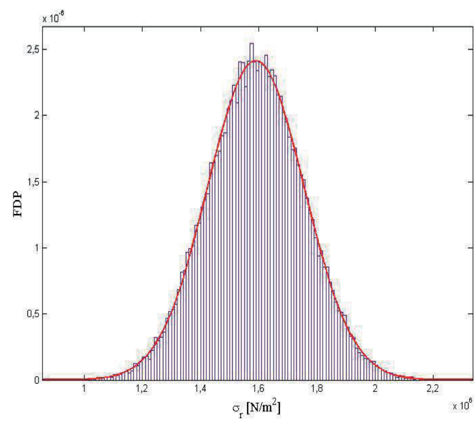
(a) α=0,05



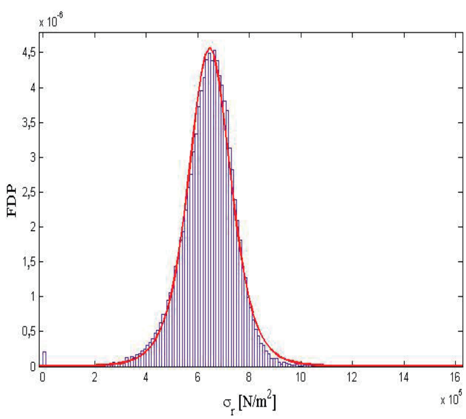
(b) α=0,05



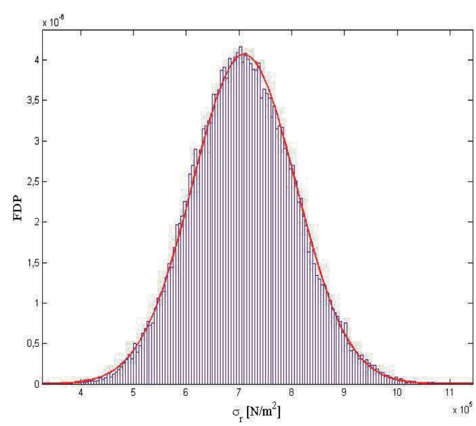
(c) α=0,10



(d) α=0,10



(e) α=0,40



(f) α=0,40

Figura D.7. Parâmetro σ_r para D =1,0 m com α =0,05, α=0,1 e α=0,40: para EEB a), e) e f) distribuição T-Student e para MDP: c), d) e f) Normal.

SOBRE A AUTORA

INÉS DAMARIS MUÑOZ PEÑA - de nacionalidade Colombiana, engenheira civil formada pela Universidade de Cauca, e com especialização em Engenharia de Construção pela mesma Universidade. Com mestrado em Estruturas e Construção Civil pela Universidade de Brasília, com experiência em docência nas seguintes instituições; Universidade de Ibagué, Universidade de Santiago de Cali, Universidade Nacional de Manizales e Universidade de Cauca. Além disso, tem experiência na elaboração do quadro curricular do programa de engenharia civil da Universidade Santiago de Cali e na direção de projetos de graduação e mestrado na Universidade de Cauca.

AVALIAÇÃO DO RISCO DE FALHA

BASEADA NA MECÂNICA DA FRATURA E EFEITO DE ESCALA CONSIDERANDO A INCERTEZA DA CARACTERIZAÇÃO DE

MATERIAIS CIMENTÍCIOS

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

APOIO

UnB

CAPES

Atena Editora

Ano 2024

AVALIAÇÃO DO RISCO DE FALHA

BASEADA NA MECÂNICA DA FRATURA E EFEITO DE ESCALA CONSIDERANDO A INCERTEZA DA CARACTERIZAÇÃO DE

MATERIAIS CIMENTÍCIOS

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

APOIO

UnB
CAPES

Atena
Editora
Ano 2024